1 Priebežné písomné zadanie č.1.

Vypočítajte dvojné integrály:

1. $\iint_I x^2 y \cos\left(xy^2\right) dxdy,\ I = \left\langle 0, \frac{\pi}{2}\right\rangle \times \langle 0, 2\rangle$.
2. $\iint_I ye^{x+y} dxdy,\ I = \langle 0, 2\rangle \times \langle 0, 1\rangle$.
3. $\iint_I \ln(1+x)^{2y} dxdy,\ I = \langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 1\rangle$.

Vypočítajte dvojné integrály. Načrtnite obrázok množiny A.

1. $\iint_A \cos(x+y)\, dxdy,\ A = \{(x, y)\,;\, 0 \leq x \leq \pi,\ x \leq y \leq \pi\}$.
2. $\iint_A ye^x dxdy,\ A = \left\{(x, y)\,;\, y^2 \leq x \leq y+2\right\}$.
3. $\iint_A \frac{x^2}{y^2} dxdy,\ A = \left\{(x, y)\,;\, 0 \leq \frac{1}{x} \leq y \leq x,\ x \leq 2\right\}$
4. $\iint_A \left(x^2+y^2\right) dxdy$, A je ohraničená krivkami $y = 0$, $y = -x+1$, $y = x+1$.
5. $\iint_A \left(x^2+y\right) dxdy$, A je ohraničená krivkami $y = \frac{1}{2}x$, $y = 2x$, $xy = 2$, $x \geq 0$.
6. $\iint_A \frac{1}{x+y+1} dxdy$, A je trojuholník KLM, $K = (1, 2)$, $L = (5, 2)$, $M = (4, 4)$.

Vypočítajte plošný obsah rovinných obrazcov určených množinou A, keď

1. A je ohraničená krivkami: $y = \frac{1}{2}(x-2)^2$ a $x^2+y^2 = 4$.
2. $A = \left\{(x, y)\,;\, 0 \leq y \leq x,\ x^2+y^2 \leq 2x\right\}$.
3. $A = \left\{(x, y)\,;\, x \leq y \leq \sqrt{3}x,\ 4x \leq x^2+y^2 \leq 8x\right\}$.

Použitím vhodnej transformácie vypočítajte dané integrály a načrtnite obrázok A.

1. $\iint_A \sqrt{1-x^2-y^2} dxdy,\ A = \left\{(x, y)\,;\, x^2+y^2 \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0\right\}$.
2. $\iint_A xy^2 dxdy,\ A = \left\{(x, y)\,;\, 2y \leq x^2+y^2 \leq 4y\right\}$.
3. $\iint_A \sin\sqrt{x^2+y^2} dxdy,\ A = \left\{(x, y)\,;\, \pi^2 \leq x^2+y^2 \leq 4\pi^2\right\}$.
4. $\iint_A \sqrt{a^2-x^2-y^2} dxdy,\ A = \left\{(x, y)\,;\, x^2+y^2 \leq ax\right\}$.
5. $\iint_A \operatorname{arctg}\frac{y}{x} dxdy,\ A = \left\{(x, y)\,;\, 1 \leq x^2+y^2 \leq 9,\ \frac{x}{\sqrt{3}} \leq y \leq \sqrt{3}x\right\}$.
6. $\iint_A \ln\left(1+x^2+y^2\right) dxdy,\ A = \left\{(x, y)\,;\, y \leq \sqrt{r^2-x^2},\ x \geq 0,\ y \geq 0\right\}$.

Vypočítajte trojné integrály. Načrtnite obrázok množiny A.

1. $\iiint_A (1-x)\, yz dxdydz,\ A = \{(x,y,z)\,;\, x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0,\ z \le 1-x-y\}$.
2. $\iiint_A z^2 dxdydz,\ A = \left\{(x,y,z)\,;\, x \ge 0,\ y \ge 0,\ \sqrt{x^2+y^2} \le z \le \sqrt{2-x^2-y^2}\right\}$.
3. $\iiint_A \left(x^2+y^2+z^2\right) dxdydz,\ A = \left\{(x,y,z)\,;\, x^2+y^2 \le z^2,\ x^2+y^2+z^2 \le r^2\right\}$.
4. $\iiint_A \left(x^2+y^2\right) dxdydz,\ A = \left\{(x,y,z)\,;\, x^2+y^2 \le 2z,\ z \le 2\right\}$.
5. $\iiint_A \sqrt{x^2+y^2+z^2} dxdydz,\ A = \left\{(x,y,z)\,;\, x^2+y^2+z^2 \le z\right\}$.
6. $\iiint_A \left(x^2+y^2\right) dxdydz,\ A = \left\{(x,y,z)\,;\, 4 \le x^2+y^2+z^2 \le 9,\ z \ge 0\right\}$.
7. $\iiint_A x^2 yz dxdydz,\ A = \left\{(x,y,z)\,;\, x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \le 0,\ 4x^2+y^2+z^2 \le 9\right\}$.
8. $\iiint_A xyz dxdydz,\ A = \left\{(x,y,z)\,;\, x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0,\ x^2+y^2+z^2 \le 1\right\}$.
9. $\iiint_A (2x+3y-z)\, dxdydz$, A je ohraničená plochami $z = 0$, $z = a$, $x = 0$, $y = 0$, $x+y = b$, $a > 0$, $b > 0$.
10. $\iiint_A \frac{1}{(x+y+z+1)^3} dxdydz$, A je štvorsten ohraničený rovinami $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x+y+z = 1$.

Nájdite objem množiny A. Načrtnite obrázok!

1. $A = \left\{(x,y,z)\,;\, x^2+y^2 \le 1,\ 0 \le z \le y^2\right\}$.
2. $A = \left\{(x,y,z)\,;\, x^2+y^2+z^2 \le 12,\ x^2+y^2 \le 4z\right\}$.
3. $A = \left\{(x,y,z)\,;\, x^2+y^2 \le 2x,\ x^2+y^2+z^2 \le 4\right\}$.
4. A je ohraničená plochami $z = 6-x^2-y^2$ a $z = \sqrt{x^2+y^2}$.
5. A je ohraničená plochami $z = 4-y^2$, $z = y^2+2$, $x = -1$, $x = 2$.
6. A je ohraničená plochami $z = x^2+y^2$ a $z = x^2+2y^2$, $y = x$, $y = 2x$, $x = 1$.
7. A je ohraničená plochami $x^2+y^2 = 9$, $z = 5$ a $x+y+z = 8$.
8. A je ohraničená plochami $z = 0$, $z = 2-y$, $y = x^2$.
9. A je ohraničená plochami $x^2+y^2 = 2x$, $x^2+y^2 = z-2$.
10. A je ohraničená plochami $x = 0$, $z = 0$, $y = 1$, $y = 3$, $x+2z = 3$.

2 Priebežné písomné zadanie č.2.

Vypočítajte krivkové integrály:

1. $\int_C \frac{1}{x-y} ds,$ kde C je úsečka od bodu $[0,-2]$ po bod $[4,0]$.
2. $\int_C x ds,$ kde C je časť paraboly $y = x^2$ medzi bodmi $[2,4]$ a $[1,1]$.
3. $\int_C x^2 ds,$ kde C je časť grafu $y = \ln x,$ kde $1 \leq x \leq 2.$
4. $\int_C \sqrt{x^2+y^2} ds,$ kde C je kružnica $x^2 + y^2 = x.$
5. $\int_C \left(x^2+y^2\right) dx + \left(x^2-y^2\right) dy,$ kde C je časť grafu funkcie $y = 1-|1-x|,\ 0 \leq x \leq 2,$ so začiatočným bodom $[0,0]$.
6. $\int_C \left(x^2-2xy\right) dx + \left(y^2-2xy\right) dy,$ kde C je krivka $y = x^2,$ z bodu $[-1,1]$ po bod $[1,1]$.
7. $\int_C y dx + x dy,$ kde C je časť kružnice $x = a\cos t, y = a\sin t,\ t \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle,$ kde $[a,0]$ je začiatočný bod.
8. $\int_C x dx + y dy + (x+y-1) dz,$ kde C je úsečka so začiatočným bodom $[1,1,1]$ a koncovým bodom $[2,3,4]$.

   Zistite, či pre nasledujúce integrály existuje pre podintegrálnu funkciu potenciál, t.j., či sú závislé od integračnej cesty:

9. $\int_C (2x+3y) dx + (3x-4y) dy.$
10. $\int_C \left(x^4+4xy^3\right) dx + \left(6x^2y^2-5y^4\right) dy.$

    Použitím Greenovej vety vypočítajte integrály:

11. $\int_C y^2 dx + x dy,$ ak C je hranica štvorca ohraničená priamkami $x = 1,\ x = -1,\ y = 1,\ y = -1,$ ktorá je kladne orientovaná.
12. $\int_C \frac{1}{x} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} dx + \frac{2}{y} \operatorname{arctg} \frac{x}{y} dy,$ kde C je hranica oblasti $1 \leq x^2+y^2 \leq 4,\ x \leq y \leq \sqrt{3}x,$ ktorá je kladne orientovaná.
13. $\int_C \left(3x^2\cos y - y^3, x^3 - x^3\sin y\right) d\mathbf{s},$ kde C je kladne orientovaná krivka daná vzťahom $x^2+y^2 = 1.$

3 Priebežné písomné zadanie č.3.

1. Vypočítajte všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice:
2. $y'' + 3y' - 4y = 0.$
3. $y'' - 2y' + 2y = 0.$
4. $y'' + 6y' + 9y = 0.$
5. $y'' - 4y' + 20y = 0.$

   Vyriešte začiatočné úlohy:
6. $y'' + 5y' + 6y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 2.$
7. $y'' + 2y' + 2y = 0,\ y(0) = 3,\ y'(0) = 1.$
8. $y'' - 3y' - 4y = 0,\ y(0) = -1,\ y'(0) = 2.$
9. $y'' - 2y' + 3y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$

   Vyriešte okrajové úlohy:
10. $y'' + 4y' + 4y = 0,\ y(0) = 2,\ y'(1) = 0.$
11. $y'' + 4y' + 5y = 0,\ y\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1,\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$
12. $y'' + 2y' + 26y = 0,\ y(0) = 1,\ y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0.$
13. $y'' + 2y' - 3y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(1) = 1.$

    Vypočítajte všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice:
14. $y'' + 2y' - 3y = 4 + x + 4e^{2x}.$
15. $y'' + 2y' + y = 5 + x^2 e^x.$
16. $y'' + 4y' + 4y = \sin x - 2\cos x.$
17. $y'' + 2y' - 15y = 3 + 2x \sin x.$

    Vyriešte začiatočné úlohy:
18. $y'' + 2y' + 5y = 2\sin x,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$
19. $y'' + 2y' + y = \sin x,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$
20. $y'' + 3y' + 2y = \sin 3x,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$
21. $y'' + 9y = 7 + 2\sin 3x - 4\cos 3x,\ y(0) = -1,\ y'(0) = 1.$

Skúška z matematiky III.

Meno a priezvisko:

	1.	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**6.**	**Spolu**
Teória							
Príklady							

Celkový počet bodov/Známka:

1. (a) Definujte elementárnu oblasť typu $[x, y]$. Napíšte vetu o výpočte dvojného integrálu na elementárnej oblasti typu $[x, y]$. (5 bodov).

   (b) Vypočítajte integrál a načrtnite obrázok množiny A. $\iint_A \left(x^2 + y\right) dxdy$, A je ohraničená krivkami $y = \frac{1}{2}x$, $y = 2x$, $xy = 2$, $x \geq 0$. (10 bodov)

2. (a) Napíšte vetu o zámene kartézskych súradníc za cylindrické súradnice pre trojný integrál. (5 bodov)

   (b) Vypočítajte integrál a načrtnite obrázok množiny A.

   $$\iiint_A xdxdydz,\ A \text{ je ohraničená plochami } x^2+y^2 = -2z+9,\ z = 0. \text{ (15 bodov)}$$

3. (a) Napíšte parametrizáciu polkružnice $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 4$ so začiatočným bodom $(1, 2)$, koncovým bodom $(5, 2)$, ktorá prechádza bodom $(3, 0)$. (5 bodov)

   (b) $\int_C \sqrt{x^2 + y^2} ds$, kde C je kružnica $x^2 + y^2 = x$.(10 bodov)

4. (a) Napíšte vetu o výpočte krivkového integrálu z vektorovej funkcie. (5 bodov).

   (b) $\int_C ydx + xdy$, kde C je časť kružnice $x^2 + y^2 = a^2$, kde $(a, 0)$ je začiatočný bod a $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}a, \frac{1}{\sqrt{2}}a\right)$ je koncový bod. (10 bodov)

5. (a) Ako súvisí wronskián funkcií $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ s ich lineárnou závislosťou? (5 bodov)

   (b) Vypočítajte všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice $y'' + 5y' + 4y = 0$. (10 bodov)

6. (a) Napíšte charakteristickú rovnicu pre lineárnu obyčajnú diferenciálnu rovnicu druhého rádu s konštantnými koeficientami $y'' + Ay' + By = 0$, A, $B \in \boldsymbol{R}$.

   (b) Vyriešte začiatočnú úlohu $y'' - 3y' + 3y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.