

## 1 Priebežné písomné zadanie č.1.

Príklady je potrebné vypočítať napísať a odovzdať na kontrolu na nasledujúcej konzultácii.

Nasledujúce integrály vypočítajte pomocou základných pravidiel derivovania:

1.  $\int (3x^3 + 2x - 4) dx.$

2.  $\int \left( \sqrt{x^3} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx.$

3.  $\int \frac{x^3-1}{x-1} dx.$

4.  $\int e^x a^x dx.$

5.  $\int \left( 1 + \cos^2 \left( \frac{x}{2} \right) - \sin^2 \left( \frac{x}{2} \right) \right) dx.$

6.  $\int \left( 10^{-x} + \frac{x^2+2}{x^2+1} \right) dx.$

Metódou per partes vypočítajte integrály:

7.  $\int x \operatorname{arctg} x dx.$

8.  $\int e^{2x} \sin x dx.$

Vypočítajte integrály:

9.  $\int x^2 e^{\sqrt{x}} dx.$

10.  $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}} dx.$

11.  $\int \frac{e^x + 10}{e^{2x} - 2e^x + 5} dx.$

12.  $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x + \sqrt[6]{x^5}} dx.$

13.  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^2 x + \sin x - 6} dx.$

14. Vypočítajte plošný obsah rovinatej oblasti ohraničenej čiarami (Načrtnite obrázok):  $y = x \ln x$ ,  $x = \frac{1}{2}$ ,  $x = 2$ ,  $o_x$ .

15. Vypočítajte plošný obsah rovinatej oblasti ohraničenej čiarami (Načrtnite obrázok):  $y = \frac{27}{x^2+9}$ ,  $y = \frac{x^2}{6}$ .

Vypočítajte integrály z racionálnych funkcií:

16.  $\int \frac{2x+1}{x^2+2x+5} dx.$

17.  $\int \frac{x^5+x^4-7x^3+8x-3}{x^3+x^2-6x} dx.$

18.  $\int \frac{6x-13}{(4x^2+4x+17)^2} dx.$

19.  $\int \frac{2x^3-2x^2+4x-4}{x^4+4} dx.$

20. Vypočítajte integrál (najskôr substitúcia, potom racionálna funkcia):

$$\int \frac{e^x+10}{e^{2x}-2e^x+5} dx.$$

21. Vypočítajte integrál (najskôr substitúcia, potom racionálna funkcia):

$$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \frac{dx}{x}.$$

22. Vypočítajte integrál (Eulerova substitúcia):  $\int \sqrt{x^2+4x+3} dx.$

23. Vypočítajte integrál (doplnenie na vhodný tvar, alebo Eulerova substitúcia):

$$\int \frac{1}{\sqrt{8-6x-9x^2}} dx.$$

24. Vypočítajte integrál (doplnenie na vhodný tvar, alebo Eulerova substitúcia):

$$\int \sqrt{3-2x-x^2} dx.$$

25. Vypočítajte integrál (univerzálna trigonometrická substitúcia):  $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3+\cos x} dx.$

26. Vypočítajte integrál (vzorec):  $\int \cos(3x) \cos(4x) dx.$

27. Vypočítajte integrál (substitúcia, potom racionálna funkcia):  $\int \frac{(3 \sin^2 x - 5 \sin x - 5) \cos x}{(\sin x - 3)(\sin^2 x - \sin x + 1)} dx.$

## 2 Priebežné písomné zadanie č.2.

Príklady je potrebné vypočítať a odovzdať na kontrolu na nasledujúcej konzultácii.

1. Nájdite súčet radu, ak existuje (použite definíciu súčtu radu)

2. 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+4)}.$$

3. 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( e^{\frac{1}{n}} - e^{\frac{1}{(n+2)}} \right).$$

Vyšetrte konvergenciu radu

4. 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}}.$$

5. 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}.$$

6. 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}.$$

7. 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n+2}{2n+5} \right)^n.$$

8. 
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\ln(2n+1)}.$$

9. 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}.$$

10. 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \left( \frac{1}{n} \right) \operatorname{tg} \left( \frac{1}{n} \right).$$

11. 
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n}.$$

Nájdite a načrtnite definičný obor funkcie

12. 
$$f(x, y) = \left( \frac{x^2 + y^2 - x}{2x - x^2 - y^2} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

13. 
$$f(x, y) = \sqrt{y^2 - x^2} + \ln(6 + 2x - y^2).$$

14. 
$$f(x, y) = \ln(x \sin y) + \sqrt{y \sin x}.$$

15. 
$$f(x, y, z) = \sqrt{1 - x^2 - y^2 + z^2} + \frac{1}{x^2 + y^2 - z^2 - 1}.$$

16. Daná je funkcia  $f(x, y) = \sqrt{2x^2 + 4y^2}$ . Načrtnite graf zúženia  $f|_A$ ,  $f|_B$ , ak  $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 2x^2 + 4y^2 \leq 1\}$ ,  $B = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$ .

### 3 Priebežné písomné zadanie č.3.

1. Vypočítajte  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{x}^{(n)}$  v  $\mathbf{R}^3$ , ak  $\mathbf{x}^{(n)} = \left( \left( \frac{n+1}{n} \right)^n, \sqrt[n]{2}, \frac{\sin n}{n} \right)$ .
2. Vypočítajte  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{x}^{(n)}$  v  $\mathbf{R}^2$ , ak  $\mathbf{x}^{(n)} = \left( \frac{n^2}{n^3+1}, 1 - 2 \cdot (-1)^n \right)$ .
3. Nájdite definičný obor a komponenty funkcie  $\mathbf{f}(x, y) = (x \cos y, x \sin y, y)$ .
4. Nájdite definičný obor a komponenty funkcie  $\mathbf{f}(t) = \sqrt{t+1} \mathbf{i} + \sqrt{t-1} \mathbf{j} + \mathbf{k}$ .
5.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2) \sin \left( \frac{1}{xy} \right)$ .
6.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,2)} \frac{\sin(xy)}{x}$ .
7.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (\infty, k)} \left( 1 + \frac{y}{x} \right)^x$ .
8.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x}{x+y}$ .
9. Daná je funkcia  $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{2x-3y+z^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ 0 & (x, y, z) = (0, 0, 0) \end{cases}$ . Vypočítajte
  - (a) parciálne derivácie v bode  $(0, 0, 0)$ ,
  - (b) zistite, či je funkcia v bode  $(0, 0, 0)$  diferencovateľná.
10. Pomocou definície vypočítajte parciálne derivácie funkcie  $f(x, y) = 4x^3 - 2y^2 + 3xy^2 + 5y$  v bode  $\mathbf{a} = (1, 2)$ .
11. Pomocou definície vypočítajte parciálne derivácie funkcie  $f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \cos \left( \frac{1}{x^2 + y^2} \right) & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$  v bode  $\mathbf{a} = (0, 0)$ .
12. Vypočítajte parciálne derivácie, gradient a diferenciál funkcie  $f(x, y) = \left( \frac{x}{y} \right)^2 \ln(xy)$  v bode  $\mathbf{a} = (1, e)$ .
13. Vypočítajte parciálne derivácie, gradient a diferenciál funkcie  $f(x, y) = \frac{2}{(3x^2+4y^2)^2}$  v bode  $\mathbf{a} = (-1, 1)$ .
14. Vypočítajte parciálne derivácie, gradient a diferenciál funkcie  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4-y^4}{x^4+y^4} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$  v bode  $\mathbf{a} = (0, 0)$ .
15. Vypočítajte parciálne derivácie, gradient a diferenciál funkcie  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$  v bode  $\mathbf{a} = (2, 1)$ .
16. Zistite, či je funkcia  $\mathbf{f} : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ ,  $\mathbf{f}(x, y) = \left( x, y, \sqrt{x^2 + y^2} \right)$  spojite diferencovateľná a napíšte jej deriváciu a diferenciál v bode  $\mathbf{a} = \left( \frac{3}{2}, 1 \right)$ .

17. Nájdite rovnicu dotykovej roviny a normály ku grafu funkcie  $f(x, y) = xy$  v bode  $T = (?, 2, 2)$ .
18. Nájdite rovnicu dotykovej roviny a normály ku grafu funkcie  $f(x, y) = x^4 + 2x^2y - xy + x$  v bode  $T = (1, ?, 2)$ .
19. Nájdite deriváciu funkcie  $f(x, y) = e^y \cos(x + y)$  v bode  $\mathbf{a} = \left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$  v smere vektora  $\mathbf{e} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ .
20. Nájdite smer, v ktorom je smerová derivácia funkcie  $f(x, y) = 3x^4 + 7y^2 - 4x^2y$ , v bode  $\mathbf{a} = (1, 0)$  maximálna a jej hodnotu.

## 4 Priebežné písomné zadanie č.4.

V nasledujúcich príkladoch nájdite lokálne extrémny funkcií :

1.  $f(x, y) = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2.$

2.  $f(x, y) = e^{2x}(x + y^2 + 2y).$

3.  $f(x, y) = x^3 + y^3 - 18xy + 215.$

4.  $f(x, y) = 27x^2y + 14y^3 - 69y - 54x.$

5.  $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy + 2.$

6.  $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy - x - y + 2.$

7.  $f(x, y) = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5.$

8.  $f(x, y) = 5xy + \frac{25}{x} + \frac{8}{y}, x > 0, y > 0.$

9.  $f(x, y) = xy(2 - x - y).$

10.  $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}(2y^2 + x^2).$

11.  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + 2z + x.$

12.  $f(x, y, z) = 3x^2 + 3x + 2y^2 + 2yz + 2y + 2z^2 - 2z.$

13.  $f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + 2z - xy - xz.$

14.  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z.$

15.  $f(x, y, z) = 2x - y + z - yz - x^2 - y^2 - z^2.$

16.  $f(x, y, z) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z.$

Nájdite lokálne extrémny funkcie a nakreslite graf funkcie  $f$ , ak:

17.  $f(x, y) = 2 + \sqrt{x^2 + y^2}.$

18.  $f(x, y) = -x^2 + 4x - y^2 - 6y - 9.$

19.  $f(x, y) = x^2 - y^2 + 2x - 2y.$