1 Stručná osnova predmetu M1 dist

1. Úvod do štúdia. Prirodzené, racionálne, reálne a komplexné čísla. Vlastnosti podmnožín číselnej osi. Funkcia, zložená funkcia, inverzná funkcia. Polynómy, rozklad racionálnych funkcií na elementárne zlomky.

2. Eliminačné metódy riešenia systémov lineárnych rovníc, matice, operácie s maticami.

3. Regulárne a singulárne matice, inverzná matica.

4. Determinant matice a jeho základné vlastnosti. Cramerovo pravidlo.

5. Vektory v 3-rozmernom priestore, skalárny, vektorový a zmiešaný súčin. Priamky a roviny v priestore. Kvadratické plochy v základnej polohe.

6. Spojitosť a limita funkcie. Nevlastná limita. Nerovnice pre limity.

7. Postupnosti reálnych čísel. Nekonečné číselné rady. Kritériá konvergencie.

8. Mocninové rady. Definícia elementárnych funkcií sin, cos, exp a niektoré ich základné vlastnosti. 1. Diferencovateľnosť funkcie. Rýchlosť pohybujúceho sa bodu po priamke. Spojitá funkcia na intervale.

9. Veta o nulovom bode a jej využitie pri hľadaní reálneho koreňa funkcie. Lokálne extrémy funkcie.

10. Rolleova, Lagrangeova a Cauchyho veta. Zisťovanie monotónnosti funkcie pomocou derivácie. Konvexnosť a konkávnosť funkcie. Inflexný bod.

11. Taylorova veta. Taylorov rad. Derivácia inverznej funkcie. Zhrnutie o elementárnych funkciách.

12. Priebeh funkcie.

2 Priebežné písomné zadanie č.1.

1. Nájdite modul, argument a zobrazte v komplexnej rovine nasledujúce komplexne čísla:

   (a) $1-\sqrt{3}i$,

   (b) $-2+2i$,

   (c) -4,

   (d) i^5.

2. Zapíšte nasledujúce čísla v trigonometrickom a exponenciálnom tvare:

   (a) $1+\sqrt{3}i$,

   (b) $2+2i$,

   (c) -2,

   (d) $-i^3$.

3. Vypočítajte a napíšte v algebrickom tvare:

   (a) $\left(1+\sqrt{3}i\right)^3$, $[-8]$

(b) $\frac{(1-i)^2}{1+i}$. $[-1-i]$

4. Nájdite všetky korene rovníc a zobrazte ich v komplexnej rovine

(a) $z^3 = i$, $\left[\begin{array}{c} z_0 = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, \\ z_1 = \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \\ z_2 = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i \end{array}\right]$

(b) $z^4 = -1$, $\left[\begin{array}{c} z_0 = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, \\ z_1 = \cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, \\ z_2 = \cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i, \\ z_3 = \cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \end{array}\right]$

(c) $z^4 = 1 - \sqrt{3}i$, $\left[\begin{array}{c} z_0 = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right), \\ z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right), \\ z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12}\right), \\ z_3 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{17\pi}{12} + i\sin\frac{17\pi}{12}\right) i \end{array}\right]$

(d) $z^4 = 1$, $\left[\begin{array}{c} z_0 = \cos 0 + i\sin 0 = 1, \\ z_1 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i, \\ z_2 = \cos\pi + i\sin\pi = -1, \\ z_3 = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i \end{array}\right]$

(e) $z^3 = -1$. $\left[\begin{array}{c} z_0 = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \\ z_2 = \cos\pi + i\sin\pi = -1, \\ z_1 = \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{array}\right]$

5. Kedy je súčet komplexných čísel $a + bi,\ c + di$ číslo

(a) reálne,

(b) imaginárne,

(c) rýdzoimaginárne?

6. Vypočítajte

(a) $(2+3i)(3-4i) - (5-4i)$, $[13+5i]$

(b) $(-2+3i)^3$, $[46+9i]$

(c) $i^n,\ n \in \mathbf{N}$, $\left[= \left\{\begin{array}{c} i,\ n = 4k+1 \\ -1,\ n = 4k+2 \\ -i,\ n = 4k+3 \\ 1,\ n = 4k \end{array}\right.\right]$

(d) $\dfrac{2}{-1+3i}$, $\left[-\frac{1}{5} - \frac{3}{5}i\right]$

(e) $\dfrac{(1-i)^3}{(2+i)(1+2i)}$, $\left[-\frac{2}{5} + \frac{2}{5}i\right]$

7. Pre ktoré komplexné čísla $z = a + bi$ platí

   (a) $z = \overline{z}$, $[z = x + 0i]$

   (b) $z^2 = \overline{z}$, $\left[z = 0, z = 1, z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

8. Vypočítajte absolútnu hodnotu komplexných čísel

   (a) $3 - 4i$, $[5]$

   (b) $\dfrac{(1+i)^{12}}{(1-i)^{10}}$, $[2]$

9. Napíšte v goniometrickom a exponenciálnom tvare komplexné čísla:

   (a) 5, $\left[5\left(\cos 0 + i \sin 0\right) = 5e^{i0}\right]$

   (b) -3, $\left[3\left(\cos \pi + i \sin \pi\right) = 3e^{i\pi}\right]$

   (c) $2i$, $\left[2\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{2}}\right]$

   (d) $-i$, $\left[1\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = e^{-i\frac{\pi}{2}}\right]$

   (e) $-\sqrt{3} - 3i$, $\left[\sqrt{12}\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right) = \sqrt{12}e^{-i\frac{2\pi}{3}}\right]$

   (f) $\sqrt{2} - i\sqrt{2}$, $\left[2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = 2e^{-i\frac{\pi}{4}}\right]$

   (g) $1 - \cos\alpha + i \sin\alpha$, $\left[\begin{array}{l} 2\sin\frac{\alpha}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi-\alpha}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi-\alpha}{2}\right)\right) = 2\sin\frac{\alpha}{2}e^{i\left(\frac{\pi-\alpha}{2}\right)}, \\ \alpha \in \langle 4k\pi, 2\pi + 4k\pi\rangle \\ 2\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|\left(\cos\left(\frac{3\pi-\alpha}{2}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi-\alpha}{2}\right)\right) = 2\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|e^{i\left(\frac{3\pi-\alpha}{2}\right)}, \\ \alpha \in (2\pi + 4k\pi, 4\pi + 4k\pi) \end{array}\right]$

10. Riešte binomickú rovnicu

   (a) $x^2 = 2i$, $\left[\begin{array}{c} x_0 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 1 + i, \\ x_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right) = -1 - i \end{array}\right]$

   (b) $x^2 = -8i$, $\left[\begin{array}{c} z_0 = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = 2 - 2i, \\ z_1 = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = -2 + 2i \end{array}\right]$

   (c) $x^3 = -i$, $\left[\begin{array}{c} z_0 = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i, \\ z_1 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = -i \\ z_2 = \cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \end{array}\right]$

11. Zistite, ktoré z matíc

$$
\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{B} = (-1,\ 0,\ 2), \qquad \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \end{pmatrix},
$$

$$
\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{G} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix},
$$

$$
\boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{K} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix},
$$

$$
\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0, & 1, & 2, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 2, & 1, & 2 \\ 0, & 0, & 2 \\ 0, & 0, & -2 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{O} = \begin{pmatrix} 1, & 0, & 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & 5, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & ,0, & 1 \end{pmatrix}
$$

sú

(a) stupňovité, [$\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{J}$, $\boldsymbol{L}$, $\boldsymbol{O}, \boldsymbol{K}$ pre $\alpha = k\pi$, $k \in \boldsymbol{Z}$,]

(b) redukované stupňovité? [$\boldsymbol{L}$, $\boldsymbol{O}, \boldsymbol{K}$ pre $\alpha = 2k\pi$, $k \in \boldsymbol{Z}$,]

12. Nájdite redukovanú stupňovitú maticu, ktorá je riadkovo ekvivaletná s maticou

(a) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ $\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}\right]$

(b) $\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ $\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right]$

13. Rozhodnite, či sú ekvivaletné sústavy lineárnych rovníc $\mathcal{S}_1\mathcal{S}_2$, ak

(a) $\mathcal{S}_1 : \begin{array}{r} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 2 \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 1 \end{array}$ $\qquad \mathcal{S}_2 : \begin{array}{r} 2y_1 + y_2 - 3y_3 = 2 \\ y_1 + 4y_2 - y_3 = 1 \end{array}$ [áno]

(b) $\mathcal{S}_1 : \begin{array}{r} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 2 \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 1 \end{array}$ $\qquad \mathcal{S}_2 : \begin{array}{r} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 2 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 3 \end{array}$ [nie]

14. Riešte sústavu lineárnych rovníc

(a)

$$
\begin{aligned}
3x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 3 \\
-2x_1 + 3x_2 - 5x_3 &= -3 \\
x_1 + 7x_2 - 3x_3 &= 16
\end{aligned}
$$

$$\left[\begin{array}{c}\text{maticu upravíme najskôr na stupňovitú maticu,}\\ \text{potom na na stupňovitú redukovanú}\\ \begin{pmatrix}3 & -2 & 3 & 3\\ -2 & 3 & -5 & -3\\ 1 & 7 & -3 & 16\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 2\end{pmatrix}\\ K=\{(1,\,3,\,2)\}\end{array}\right]$$

(b)

$$\begin{aligned}-2x_1+3x_2+5x_3 &= 3\\ 3x_1+x_2-4x_3 &= 5\\ 4x_1+5x_2-3x_3 &= 8\end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{c}\text{maticu upravíme na stupňovitú maticu}\\ \begin{pmatrix}-2 & 3 & 5 & 3\\ 3 & 1 & -4 & 5\\ 4 & 5 & -3 & 8\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}11 & 0 & -17 & 0\\ 0 & 11 & 7 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\\ \text{nemá riešenie}\end{array}\right]$$

(c)

$$\begin{aligned}5x_1+2x_2+4x_3+x_4 &= 9\\ -2x_1+x_2-x_3-x_4 &= 5\\ -4x_1+4x_2-2x_4 &= 18\\ 7x_1+3x_2+7x_3+2x_4 &= 12\\ 3x_1+2x_2+2x_3 &= 10\end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{c}\text{maticu upravíme najskôr na stupňovitú maticu,}\\ \text{potom na na stupňovitú redukovanú}\\ \begin{pmatrix}5 & 2 & 4 & 1 & 9\\ -2 & 1 & -1 & -1 & 5\\ -4 & 4 & 0 & -2 & 18\\ 7 & 3 & 7 & 2 & 12\\ 3 & 2 & 2 & 0 & 10\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3}\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{31}{6}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{7}{6}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\\ K=\left\{\left(\frac{2}{3},\,\frac{31}{6}+\frac{t}{2},\,-\frac{7}{6}-\frac{t}{2},t\right),\ t\in\boldsymbol{R}\right\}\end{array}\right]$$

(d)

$$\begin{aligned}2x_1-3x_2+x_3-x_4 &= 3\\ -x_1-2x_2-x_3+2x_4 &= -2\\ -x_1-9x_2-2x_3+5x_4 &= 0\end{aligned}$$

[riešime podobne - nemá riešenie]

(e)

$$\begin{aligned}2x_1-2x_2-3x_3+x_4-4x_5 &= 11\\ 3x_1-3x_2+2x_3-2x_4+x_5 &= -7\\ 5x_1-5x_2-2x_3+3x_4-11x_5 &= 18\\ 2x_1-2x_2+x_3-2x_5 &= 0\end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{c} \text{maticu upravíme na redukovanú stupňovitú maticu} \\ \begin{pmatrix} 2 & -2 & -3 & 1 & -4 & 11 \\ 3 & -3 & 2 & -2 & 1 & -7 \\ 5 & -5 & -2 & 3 & -11 & 18 \\ 2 & -2 & 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ K = \{(1+a+b,\ a,\ -2,\ 3+2b,\ b)\,,\ a,b \in \boldsymbol{R}\} \end{array}\right]$$

3 Priebežné písomné zadanie č.2.

1. Určte hodnosť matíc:

   (a) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

   $\left[\begin{array}{c} \sim \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 0 & \frac{7}{2} & 5 \end{pmatrix}. \\ \text{Maticu upravíme na stupňovitú maticu - hodnosť} = 2 \end{array} \right]$

   (b) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -6 & 2 \end{pmatrix}$

   $\left[\begin{array}{c} \sim \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \\ \text{Maticu upravíme na stupňovitú maticu - hodnosť} = 1 \end{array} \right]$

   (c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

   $\left[\begin{array}{c} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & -5 & -5 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 75 \end{pmatrix}. \\ \text{Maticu upravíme na stupňovitú maticu - hodnosť} = 5 \end{array} \right]$

   (d) $\begin{pmatrix} 81 & 90 & 67 & 107 \\ 21 & 15 & 23 & 11 \\ 39 & 60 & 21 & 85 \\ 99 & 135 & 65 & 181 \\ 120 & 150 & 88 & 192 \end{pmatrix}$ [2]

2. Vzávislosti od parametrov a, $b \in \boldsymbol{R}$ určte hodnosť matíc:

   (a) $\begin{pmatrix} 2, & 2, & 2, & -a \\ 2, & 2, & -a, & 2 \\ 2, & -a, & 2, & 2 \\ -a, & 2, & 2, & 2 \end{pmatrix} \left[\begin{array}{c} 1,\ \text{ak } a = -2; \\ 3,\ \text{ak } a = 6; \\ 4,\ \text{ak } a \in \boldsymbol{R} \setminus \{-2, 6\} \end{array} \right]$

   (b) $\begin{pmatrix} a, & b, & 1, & 0 \\ b, & a, & -1, & 0 \\ a+b, & a+b, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & a+b \end{pmatrix} \left[\begin{array}{c} 1,\ \text{pre } a = -b \\ 3,\ \text{pre } a \neq -b \end{array} \right]$

3. Zistite, ktoré z matíc

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1, & 0\\ 2, & 1\\ -1, & 2\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{B}=(-1,\ 0,\ 2),\qquad \boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}1, & 0, & 0, & -1\\ 0, & 2, & 0, & 5\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}1, & 1\\ 1, & 2\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{F}=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 3\\ 4\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{G}=\begin{pmatrix}1, & 2, & 0\\ -2, & 0, & -3\\ 0, & 3, & 5\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{H}=\begin{pmatrix}1, & 0, & 3\\ 0, & 0, & -1\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}1, & 0\\ 0, & -7\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{K}=\begin{pmatrix}\cos\alpha, & -\sin\alpha\\ \sin\alpha, & \cos\alpha\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{L}=\begin{pmatrix}1, & 0, & 0, & 0\\ 0, & 1, & 2, & 0\\ 0, & 0, & 0, & 1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}2, & 1, & 2\\ 0, & 0, & 2\\ 0, & 0, & -2\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{O}=\begin{pmatrix}1, & 0, & 0, & 1, & 0\\ 0, & 0, & 1, & 5, & 0\\ 0, & 0, & 0, & ,0, & 1\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{P}=(2,\ 0,\ -1,\ 3)$$

sú

(a) diagonálne [$\boldsymbol{J},\ \boldsymbol{K}$ pre $\alpha=k\pi,\ k\in\boldsymbol{Z}$]

(b) dolné trojuholníkové [$\boldsymbol{J},\ \boldsymbol{K}$ pre $\alpha=k\pi,\ k\in\boldsymbol{Z}$]

(c) horné trojuholníkové [$\boldsymbol{H},\ \boldsymbol{J},\ \boldsymbol{K}$ pre $\alpha=k\pi,\ k\in\boldsymbol{Z}$]

4. Pre matice $\boldsymbol{A}$ až $\boldsymbol{P}$ z predchádzajúcej úlohy vypočítajte:

(a) $3\boldsymbol{E}+\boldsymbol{J}$ $\left[\begin{pmatrix}4 & 3\\ 3 & -1\end{pmatrix}\right]$

(b) $2\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{G}$ [nie je definované]

(c) $\boldsymbol{D}^T,\ \boldsymbol{F}^T$ $\left[\boldsymbol{D}^T=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\\ 0 & 0\\ -1 & 5\end{pmatrix},\ \boldsymbol{F}^T=(1,\ 0,\ 3,\ 4)\right]$

(d) $-2\boldsymbol{G}-5\boldsymbol{H}^T$ $\left[\begin{pmatrix}-7 & -4 & 0\\ 4 & 0 & 6\\ -15 & -1 & -10\end{pmatrix}\right]$

(e) $\boldsymbol{AD}$ $\left[\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -1\\ 2 & 2 & 0 & 3\\ -1 & 4 & 0 & 11\end{pmatrix}\right]$

(f) $\boldsymbol{PF}$ [11]

(g) $\boldsymbol{FP}$ $\left[\begin{pmatrix}2 & 0 & -1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 6 & 0 & -3 & 9\\ 8 & 0 & -4 & 12\end{pmatrix}\right]$

(h) $\boldsymbol{K}^2$ $\left[\begin{pmatrix} \cos 2\alpha & -\sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{pmatrix}\right]$

(i) $\boldsymbol{GLD}^T$ $\left[\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -15 \\ -5 & 31 \end{pmatrix}\right]$

5. Riešte sústavy lineárnych rovníc v závislosti od parametra $a \in \boldsymbol{R}$:

   (a)

$$\begin{aligned} x - 6y + 2z &= -4a - 2 \\ 3x + 3y + 4z &= 3a - 6 \\ 2x - 33y + 6z &= -21a \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{c} \text{maticu upravíme najskôr na stupňovitú} \\ \begin{pmatrix} 1 & -6 & 2 & -4a-2 \\ 3 & 3 & 4 & 3a-6 \\ 2 & -33 & 6 & -21a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -6 & 2 & -4a-2 \\ 0 & 21 & -2 & 15a \\ 0 & 0 & 0 & 2a+4 \end{pmatrix} \\ \text{nemá riešenie pre } a \neq -2, \text{ pre } a = -2 \text{ opäť upravíme} \\ \begin{pmatrix} 1 & -6 & 2 & 6 \\ 0 & 21 & -2 & -30 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{10}{7} & -\frac{18}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{21} & -\frac{10}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \left\{\left(-\frac{18}{7} - \frac{10}{7}t, -\frac{10}{7} + \frac{2}{21}t, t\right);\ t \in \boldsymbol{R}\right\},\ \text{pre } a = -2 \end{array}\right]$$

   (b)

$$\begin{aligned} ax + y + z &= 1 \\ x + ay + z &= 1 \\ x + y + az &= 1 \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{l} \emptyset,\ \text{pre } a = -2 \\ \{(1 - t - s,\ t,\ s);\ t \in \boldsymbol{R}\},\ \text{pre } a = 1 \\ \left\{\left(\dfrac{1}{a+2}, \dfrac{1}{a+2}, \dfrac{1}{a+2}\right)\right\},\ \text{pre } a \neq -2, 1 \end{array}\right]$$

6. Vypočítajte inverznú maticu k matici:

   (a) $\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\left[\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$

   (b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ $\left[\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\right]$

7. Vypočítajte determinanty:

   (a) $\begin{vmatrix} 3, & -2 \\ 4, & -5 \end{vmatrix}$ $[-7]$

   (b) $\begin{vmatrix} 2-i, & -i \\ 3+i, & 1-i \end{vmatrix}$ $[0]$

   (c) $\begin{vmatrix} 3, & -2, & 3 \\ 4, & -5, & 0 \\ -1, & 0, & 2 \end{vmatrix}$ $[-29]$

8. Napíšte rozvoj podľa 2. stĺpca a vypočítajte:

   (a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$

   $\left[2\,(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 5\,(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 8\,(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 0\right]$

   (b) $\begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & -2 & 1 \\ 3 & 6 & -1 & -2 \end{vmatrix}$ $[300]$

9. Vypočítajte:

   (a) $\begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 & a \\ 4 & -1 & 0 & b \\ 3 & 0 & -2 & c \\ 3 & 6 & -1 & d \end{vmatrix}$ $[84b - 51a - 75c - 3d]$

   (b) $\begin{vmatrix} 5 & 2 & -2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & -9 & 6 \\ -4 & -1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$ $[-6]$

   (c) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ $[-10]$

(d) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & -2 & 7 & 5 & 4 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 5 & 5 & 1 & -4 & 8 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ [0]

10. Pomocou determinantov vypočítajte, pre aké hodnoty parametrov $a, b \in \boldsymbol{C}$ je matica $\boldsymbol{A}$ regulárna:

(a) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & -2 & b \\ -2 & b & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$\left[\begin{array}{c} \det \boldsymbol{A} = 2b - 2a + ab - b^2 = (2-b)(b-a), \\ \text{matica je regulárna ak } a \neq b \wedge b \neq 2 \end{array} \right]$

(b) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -a \\ 1 & 1 & -a & 1 \\ 1 & -a & 1 & 1 \\ -a & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\left[\begin{array}{c} \det \boldsymbol{A} = a^4 - 6a^2 - 8a - 3 = (a-3)(a+1)^3, \\ \text{matica je regulárna ak } a \neq 3 \wedge a \neq -1 \end{array} \right]$

11. Pomocou determinantov vypočítajte inverznú maticu k matici:

(a) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

$$\left[\begin{array}{c} \det \boldsymbol{A} = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1, \\ \det \boldsymbol{A}_{11} = \cos\alpha, \det \boldsymbol{A}_{12} = \sin\alpha, \det \boldsymbol{A}_{21} = -\sin\alpha, \det \boldsymbol{A}_{22} = \cos\alpha \\ \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \end{array} \right]$$

(b) $\begin{pmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 5 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$\left[\begin{array}{c} \det \boldsymbol{A} = 11, \det \boldsymbol{A}_{11} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5, \det \boldsymbol{A}_{12} = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 11, \det \boldsymbol{A}_{13} = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 7, \\ \det \boldsymbol{A}_{21} = \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4, \det \boldsymbol{A}_{22} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 11, \det \boldsymbol{A}_{23} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 10 \\ \det \boldsymbol{A}_{31} = \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 7, \det \boldsymbol{A}_{32} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = 11, \det \boldsymbol{A}_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 12 \\ \begin{pmatrix} \frac{5}{11} & -\frac{4}{11} & \frac{7}{11} \\ -1 & 1 & -1 \\ \frac{7}{11} & -\frac{10}{11} & \frac{12}{11} \end{pmatrix} \end{array} \right]$$

12. Riešte sústavu lineárnych rovníc (použite Cramerove pravidlo, pokiaľ je to možné):

(a) $\begin{array}{l} 3x - 4y + 5z = \ \ 1 \\ 2x - 3y + \ z = -1 \\ 3x - 5y - \ z = \ \ 2 \end{array}$

$$\left[\begin{array}{c} D = \det\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix} = -1,\ D_x = \det\begin{pmatrix} 1 & -4 & 5 \\ -1 & -3 & 1 \\ 2 & -5 & -1 \end{pmatrix} = 59, \\ D_y = \det\begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} = 37,\ D_z = \det\begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix} = -6 \\ x = \frac{D_x}{D} = -59,\ y = \frac{D_y}{D} = -37,\ z = \frac{D_z}{D} = 6. \end{array}\right]$$

(b)

$$\begin{array}{rcl} ax + y + z & = & 4 \\ x + by + z & = & 3;\ a, b \in \boldsymbol{R} \\ x + 2by + z & = & 4 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{c} D = \det\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & 2b & 1 \end{pmatrix} = b\,(1-a) \neq 0,\ D_x = \det\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 3 & b & 1 \\ 4 & 2b & 1 \end{pmatrix} = 1 - 2b, \\ D_y = \det\begin{pmatrix} a & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} = 1 - a,\ D_z = \det\begin{pmatrix} a & 1 & 4 \\ 1 & b & 3 \\ 1 & 2b & 4 \end{pmatrix} = 4b - 2ab - 1, \\ \text{pre } b \neq 0 \wedge a \neq 1, x = \frac{D_x}{D} = \frac{1-2b}{b(1-a)},\ y = \frac{D_y}{D} = \frac{1}{b},\ z = \frac{D_z}{D} = \frac{4b-2ab-1}{b(1-a)}. \end{array}\right]$$

4 Priebežné písomné zadanie č.3.

1. Vynásobte polynómy:

   (a) $2x^4 - 6x^3 + 5x - 1)(x^2 - 2x + 2)$ $\left[2x^4 - 6x^3 - x^2 + 7x - 2\right]$

   (b) $(3x^3 + x^2 + x - 2)(3x^3 + 8x^2 - 2x - 1)$
   $\left[9x^6 + 27x^5 + 5x^4 - 3x^3 - 19x^2 + 3x + 2\right]$

2. Vydeľte polynómy so zvyškom:

   (a) $(2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6) : (x^2 - 3x + 1)$
   $\left[2x^2 + 3x + 11, \text{ zvyšok } 25x - 5\right]$

   (b) $(x^3 - x^2 - x) : (x + 2)$ $\left[x^2 - 3x + 5, \text{ zvyšok} - 10\right]$

3. Pomocou Hornerovej schémy vydeľte polynómy so zvyškom:

   (a) $(x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 6x + 8) : (x - 1)$ $\left[x^3 - x^2 + 3x - 3, \text{ zvyšok } 5\right]$

   (b) $(4x^3 + x^2) : (x + 1 + i)$ $\left[4x^2 - (3 + 4i)\, x - (1 - 7i)\, , \text{ zvyšok } 8 - 6i\right]$

4. Pomocou Hornerovej schémy vypočítajte $f(c)$:

   (a) $f(x) = x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 10x + 16, \ c = 4$ [136]

   (b) $f(x) = 6x^4 - 7x^3 + 4x + 2, \ c = -\dfrac{1}{3}$ [1]

5. Aké podmienky musia spĺňať komplexné čísla p, q, m, aby polynóm $x^4 + px^2 + q$ bol deliteľný polynómom $x^2 + mx + 1$? $\left[m = 0, \ q - p + 1 = 0 \text{ alebo } q = 1, \ p = 2 - m^2\right]$

6. Určte číslo a tak, aby číslo c bolo koreňom polynómu f:

   (a) $f(x) = x^3 + 2x^2 - ax + 2, \ c = 3$ $\left[\frac{47}{3}\right]$

   (b) $f(x) = 2x^5 - ax^4 - x^3 + ax^2 + 3a, \ c = -1$ $\left[\frac{1}{3}\right]$

7. Zistite koľkonásobným koreňom polynómu f je číslo c:

   (a) $f(x) = x^6 - 4x^5 + 6x^4 - 8x^3 + 10x^2 - 8x + 8, \ c = 2$ [dvojnásobný]

   (b) $f(x) = x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8, \ c = 2$ [trojnásobný]

   (c) $f(x) = x^5 + 7x^4 + 16x^3 + 8x^2 - 16x - 16, \ c = -2$ [štvornásobný]

   (d) $f(x) = x^6 - 2ix^5 - x^4 - x^2 + 2ix + 1. \ c = i$ [trojnásobný]

8. Nájdite racionálne korene polynómov:

   (a) $2x^7 - 13x^6 + 6x^5 + 13x^4 - 18x^3 + 29x^2 - 22x + 3,$ $\left[1 - \text{dvojnásobný}, \ -\dfrac{3}{2}\right]$

   (b) $6x^4 - 11x^3 - x^2 - 4,$ $\left[-\frac{2}{3}, 2\right]$

(c) $10x^4 - 13x^3 + 15x^2 - 18x - 24$ [nemá racionálne korene]

(d) $24x^5 + 10x^4 - x^3 - 19x^2 - 5x + 6$ $\left[-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$

(e) $x^5 + x^4 - 6x^3 - 14x^2 - 11x - 3$ $[-1$- štvornásobný$]$

9. Nájdite kanonický roklad polynómov nad $\boldsymbol{C}$:

(a) $ix^3 + 1$ $\left[i(x+i)\left(x - \frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)\left(x - \frac{-\sqrt{3}+i}{2}\right)\right]$

(b) $x^4 - 1$ $[(x-1)(x+1)(x-i)(x+i)]$

(c) $6x^4 - 11x^3 - x^2 - 4$ $\left[6(x-2)\left(x+\frac{2}{3}\right)\left(x - \frac{1+i\sqrt{7}}{4}\right)\left(x - \frac{1-i\sqrt{7}}{4}\right)\right]$

10. Nájdite kanonický roklad polynómov nad $\boldsymbol{R}$:

(a) $x^4 + 4$ $\left[\left(x^2 - 2x + 2\right)\left(2x + x^2 + 2\right)\right]$

(b) $x^6 - 8 =$ $\left[\left(x - \sqrt{2}\right)\left(x + \sqrt{2}\right)\left(x^2 - \sqrt{2}x + 2\right)\left(x^2 + \sqrt{2}x + 2\right)\right]$

(c) $3x^4 - 18x^2 + 9$

$$\left[\begin{array}{l} 3\left(x - \frac{\sqrt{6+2\sqrt{3}} + \sqrt{6-2\sqrt{3}}}{2}\right)\left(x - \frac{\sqrt{6+2\sqrt{3}} - \sqrt{6-2\sqrt{3}}}{2}\right)\cdot \\ \cdot\left(x + \frac{\sqrt{6+2\sqrt{3}} + \sqrt{6-2\sqrt{3}}}{2}\right)\left(x + \frac{\sqrt{6+2\sqrt{3}} - \sqrt{6-2\sqrt{3}}}{2}\right) \end{array}\right]$$

(d) $4x^4 + x^2 + 1$ $\left[4\left(x^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}\right)\left(x^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}\right)\right]$

(e) $2x^6 + 3x^5 + x^3 + 3x^2 - 1$ $\left[2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x+1)^3(x^2 - x + 1)\right]$

(f) $x^6 - 2x^5 + x^4 + 4x^2 - 8x + 4$ $\left[(x-1)^2(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)\right]$

11. Napíšte rozklad na elementárne zlomky nad $\boldsymbol{C}$ (bez výpočtu koeficientov) racionálnu funkciu:

(a) $\dfrac{1}{(x^3-8)^2(x^4+4x^2+16)}$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{a}{(x-2)^2} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{(x+1+i\sqrt{3})^3} + \frac{d}{(x+1+i\sqrt{3})^2} + \\ + \frac{e}{x+1+i\sqrt{3}} + \frac{p}{(x+1-i\sqrt{3})^3} + \frac{q}{(x+1-i\sqrt{3})^2} + \frac{r}{x+1-i\sqrt{3}} + \\ + \frac{s}{x-1+i\sqrt{3}} + \frac{t}{x-1-i\sqrt{3}} \end{array}\right]$$

(b) $\dfrac{3x^2+1}{(2x^3+4x^2)(x^2-4)}$ $\left[\frac{a}{x^2} + \frac{b}{x} + \frac{c}{(x+2)^2} + \frac{d}{x+2} + \frac{e}{x-2}\right]$

12. Napíšte rozklad na elementárne zlomky nad $\boldsymbol{R}$ (bez výpočtu koeficientov) racionálnu funkciu:

(a) $\dfrac{1}{(x^3-8)^2(x^4+4x^2+16)}$,

$$\left[\begin{array}{l}\dfrac{a}{(x-2)^2}+\dfrac{b}{x-2}+\dfrac{cx+d}{(x^2+2x+4)^3}+\dfrac{ex+p}{(x^2+2x+4)^2}+\\ +\dfrac{qx+r}{x^2+2x+4}+\dfrac{sx+t}{x^2-2x+4}\end{array}\right]$$

(b) $\dfrac{3x^2+1}{(2x^3+4x^2)(x^2-4)}$

$$\left[\frac{a}{x^2}+\frac{b}{x}+\frac{c}{(x+2)^2}+\frac{d}{x+2}+\frac{e}{x-2}\right]$$

(c) $\dfrac{x+1}{(x^4-16)(x^3+8)}$

$$\left[\frac{a}{(x+2)^2}+\frac{b}{x+2}+\frac{c}{x-2}+\frac{dx+e}{x^2+4}+\frac{rx+s}{x^2-2x+4}\right]$$

13. Rozložte na elementárne zlomky nad $\boldsymbol{C}$ racionálnu funkciu:

(a) $\dfrac{4}{x^4-1}$ $\quad\left[\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{i}{x-i}-\dfrac{i}{x+i}\right]$

(b) $\dfrac{x^3+3x^2+(3+i)x+2}{(x+1)^3(x-i)}$ $\quad\left[\dfrac{i}{(x+1)^3}+\dfrac{1}{x-i}\right]$

14. Rozložte na elementárne zlomky nad $\boldsymbol{R}$ racionálnu funkciu:

(a) $\dfrac{6x^2+7x+4}{2x^3+3x^2-1}$ $\quad\left[\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{4}{2x-1}\right]$

(b) $\dfrac{x^6-5x^5+13x^4-18x^3+12x^2-8x+12}{(x-2)(x^2-2x+2)^2}$

$$\left[x+1+\tfrac{3}{x-2}+\tfrac{2}{x^2-2x+2}-\tfrac{8}{(x^2-2x+2)^2}\right]$$

(c) $\dfrac{4x^5-8x^4+5x^3-x^2+x+1}{(2x^2-x)^2}$

$$\left[x-1+\tfrac{5}{x}+\tfrac{1}{x^2}-\tfrac{10}{2x-1}+\tfrac{6}{(2x-1)^2}\right]$$

(d) $\dfrac{-x^4-3x^3+10x^2-4x+1}{(x-1)(x^4-x^3-x+1)}$

$$\left[\tfrac{1}{(x-1)^3}-\tfrac{2}{x-1}+\tfrac{x-2}{x+x^2+1}\right]$$

5 Priebežné písomné zadanie č.4.

1. Nájdite definičný obor funkcie $f(x) = \frac{\sqrt{x+4}-2}{\sin 2x} + \log\left(1-x^2\right)$. $[D(f) = (-1,0) \cup (0,1)]$
2. Nájdite definičný obor funkcie $f(x) = \ln\left(1 - \log\left(x^2 - 5x + 16\right)\right)$. $[D(f) = (2,3)]$
3. Daná je funkcia $f(x) = \log\left(\frac{x^2-2}{x}\right)$. Nájdite
   (a) definičný obor funkcie, $\left[D(f) = \left(-\sqrt{2}, 0\right) \cup \left(\sqrt{2}, \infty\right)\right]$
   (b) všetky reálne čísla, pre ktoré je $f(x) > 0$. [Ak $x \in (-1,0) \cup (2,\infty)$, potom $f(x) > 0$.]
4. Nájdite definičný obor funkcie a zistite, či je párna, alebo nepárna ak $f(x) = x\left[\log(x+1) - \log x\right]$. $[D(f) = (0,\infty)$, f ani párna ani nepárna$]$
5. Nájdite definičný obor funkcie a zistite, či je párna, alebo nepárna ak $f(x) = \frac{a^x + a^{-x}}{2}$, $a > 0$. $[D(f) = \boldsymbol{R}$, párna funkcia$]$
6. Pre funkciu $f(x) = |x| - x$ nájdite definičný obor, podmnožiny definičného oboru, na ktorých je funkcia rastúca alebo klesajúca, zistite či je ohraničená a načrtnite jej graf.
   $$\left[\begin{array}{c} D(f) = \boldsymbol{R},\ f(x) = |x| - x = \left\{\begin{array}{ccc} -2x & \text{pre} & x < 0 \\ 0 & \text{pre} & x \geq 0 \end{array}\right.,\ \text{na } (-\infty, 0) \text{ je klesajúca,} \\ \text{na } (0,\infty) \text{ je konštantná, zdola ohraničená } \min_{x \in \boldsymbol{R}} f(x) = 0. \end{array}\right]$$
7. Nájdite definičný obor funkcie, obor funkčných hodnôt. Nájdite inverznú funkciu. Načrtnite graf funkcie aj inverznej funkcie, ak $f(x) = -4 + 3\sqrt{x}$.
   $\left[D(f) = \langle 0,\infty),\ H(f) = \langle -4,\infty),\ \text{je prostá } f^{-1} : \langle -4,\infty) \longrightarrow \langle 0,\infty),\ f^{-1}(x) = \left(\frac{x+4}{3}\right)^2\right]$
8. Nájdite definičný obor funkcie, obor funkčných hodnôt. Nájdite inverznú funkciu. Načrtnite graf funkcie aj inverznej funkcie, ak $f(x) = 1 + \ln(x+2)$.
   $\left[D(f) = (-2,\infty),\ H(f) = \boldsymbol{R},\ \text{je prostá } f^{-1} : \boldsymbol{R} \longrightarrow (-2,\infty),\ f^{-1}(x) = -2 + e^{x-1}.\right]$
9. Vypočítajte limitu $\lim_{x\to 2} \frac{x^2+5}{x^2-3}$. [9]
10. Vypočítajte limitu $\lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$. [6]
11. Vypočítajte limity v bodoch, v ktorých funkcia $f(x) = \frac{1}{|x^2-16|}$ nie je definovaná. Zistite, či je ohraničená a načrtnite približne jej graf.
    [Funkcia nie je definovaná v bodoch, kde je $\left|x^2 - 16\right| = 0$, t.j. $x_{1,2} = \pm 4$. Tak máme $D(f) = (-\infty,-4) \cup (-4,4) \cup (4,\infty) = \boldsymbol{R} \setminus \{-4,4\}$. Vypočítame limitu iba v bode $a = -4$. Limity v bode $a = 4$ vypočítame podobne: $\lim_{x\longrightarrow -4^-} \frac{1}{|x^2-16|} = \infty$, $\lim_{x\longrightarrow -4^+} \frac{1}{|x^2-16|} = \infty$, odkiaľ plynie, že funkcia nie je zhora ohraničená. Pretože platí $\frac{1}{|x^2-16|} > 0$, funkcia f je zdola ohraničená. Graf načrtnite sami.]

12. Vypočítajte limity funkcie f v bodoch, v ktorých nie je definovaná. Zistite, či je ohraničená a načrtnite približne jej graf, ak $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{x^2-9}, & x \in (-3,3) \\ \frac{x^3-16x}{x^2-9}, & x \notin \langle -3,3\rangle \end{cases}$.

[$D(f) = (-\infty,-3) \cup (-3,3) \cup (3,\infty) = \boldsymbol{R} \setminus \{-3,3\}$. Vypočítame limitu iba v bode $a=-3$. Limity v bode $a=3$ vypočítame podobne: $\lim_{x\to-3^-} f(x) = \lim_{x\to-3^-} \frac{x^3-16x}{x^2-9} = \infty$, $\lim_{x\to-3^+} f(x) = \lim_{x\to-3^+} \frac{x^2}{x^2-9} = -\infty$, odkiaľ plynie, že funkcia nie je ohraničená. Graf načrtnite sami.]

13. Vypočítajte limitu $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x}\right)$. [0]

14. Vypočítajte limitu $\lim_{x\to\infty} x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$. $\left[\frac{1}{2}\right]$

15. Vypočítajte limitu $\lim_{x\to-\infty} x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$. $[-\infty]$

16. Vypočítajte limitu $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} 5x}{\operatorname{tg} 6x}$. $\left[\frac{5}{6}\right]$

17. Vypočítajte limitu $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-4}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{2}}$. $\left[e^{-1}\right]$

18. Vypočítajte limitu $\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}$. [0]

19. Vypočítajte limitu $\lim_{x\to 0} x \operatorname{cotg} x$. [1]

20. Vypočítajte limitu $\lim_{x\to-2}\frac{\sqrt{6+x}-2}{x+2}$. $\left[\frac{1}{4}\right]$

6 Priebežné písomné zadanie č.5.

1. Zistite, či je funkcia $f(x) = 5x^2 + 2x - 6$ spojitá v bode $a = -3,\ 0,\ 1.$

   [Je spojitá vo všetkých bodoch.]

2. Zistite, či je funkcia $f(x) = \frac{1}{4-x}$ spojitá v bodoch $a = -2,\ 0,\ 4.$

   [Je spojitá v bodoch $a = -2,\ 0$ V bode $a = 4$ nie je definovaná, preto tam nemôže byť spojitá.]

3. Zistite, či je funkcia $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{3-x}}$ spojitá na intervale $\langle 1, 3)$, alebo na $(1, 3\rangle$.

   [$f = \frac{h}{g}$, kde $h : \langle 1, \infty) \longrightarrow \boldsymbol{R}$, $h(x) = \sqrt{x-1}$, $g : (-\infty, 3) \longrightarrow \boldsymbol{R}$, $g(x) = \sqrt{3-x}$,sú spojité, potom $f : \langle 1, 3) \longrightarrow$, $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{3-x}}$je podiel dvoch spojitých funkcií, teda je spojitá, alebo to ukážeme takto: $\forall x \in \langle 1, 3)$ platí: $\lim_{x \longrightarrow a} f(x) = \lim_{x \longrightarrow a} \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{3-x}} = \frac{\sqrt{a-1}}{\sqrt{3-a}} = f(a)$.]

4. Zistite, či je funkcia $f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 4 - 2x & x \in \left(1, \frac{5}{2}\right) \\ 2x - 7 & x \in \left(\frac{5}{2}, \infty\right) \end{array} \right.$, spojitá v bode $a = \frac{5}{2}$.

   $\Big[$Platí: funkcia $f(x)$ nie je v bode $a = \frac{5}{2}$ definovaná, preto v tomto bode ani nemôže byť spojitá.$\Big]$

5. Určte hodnotu parametra p tak, aby funkcia $f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 8e^{px} & x < 0 \\ p - 3x & x \geq 0 \end{array} \right.$,bola v bode $a = 0$ spojitá.

   $$\left[\begin{array}{c} \text{Platí: } \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} 8e^{px} = 8, \\ \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (p - 3x) = p = f(0). \\ \text{Funkcia je v bode } a = 0 \text{ spojitá ak platí:} \\ \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0) \Longrightarrow p = 8. \end{array} \right]$$

6. Vypočítajte derivácie funkcií:

   $$f_1(x) = \sqrt{\sin\left(\frac{2x}{3}\right)},\ \ f_2(x) = 4^{3x},\ \ f_3(x) = \ln\frac{5+4x}{3+7x},\ f_4(x) = x10^{-x},\ \ f_5(x) = \ln\sin 2x.$$

   $$\left[\begin{array}{c} f\,'_1(x) = \frac{\cos\left(\frac{2x}{3}\right)}{3\sqrt{\sin\left(\frac{2x}{3}\right)}},\ f\,'_2(x) = 3.\ln 4.4^{3x}, \\ f\,'_3(x) = -\frac{23}{(3+7x)(5+4x)},\ f\,'_4(x) = 10^{-x}(1 - x\ln 10),\ f\,'_5(x) = 2\,\mathrm{cotg}\,2x. \end{array} \right]$$

7. Vypočítajte derivácie funkcií:

   $$f_1(x) = \arcsin\sqrt{x},\ \ f_2(x) = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2},\ \ f_3(x) = \mathrm{arctg}\left(x - \sqrt{1+x^2}\right).$$

   $$\left[f\,'_1(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}},\ f\,'_2(x) = \arcsin x,\ f\,'_3(x) = \frac{1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{\left(x - \sqrt{x^2+1}\right)^2 + 1} \right]$$

8. Pre funkciu $f\,(x) = \left|x^2 - x - 2\right|$ nájdite $f\,'$. V bodoch, v ktorých derivácia neexistuje vypočítajte deriváciu sprava a deriváciu zľava. Načrtnite grafy f a $f\,'$.

$$\left[\begin{array}{c} f\,(x) = \left|x^2 - x - 2\right| = \begin{cases} x^2 - x - 2 & \text{pre} \quad x \le -1 \\ -x^2 + x + 2 & \text{pre} \quad -1 < x < 2 \\ x^2 - x - 2 & \text{pre} \quad x \ge 2 \end{cases}, \\ f\,'(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{pre} \quad x < -1 \\ -2x + 1 & \text{pre} \quad -1 < x < 2 \\ 2x - 1 & \text{pre} \quad x > 2 \end{cases} \\ \left.\begin{array}{r} f\,'_-(-1) = \lim_{x\to -1^-} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = \lim_{x\to -1^-} \frac{x^2-x-2}{x+1} = -3 \\ f\,'_+(-1) = \lim_{x\to -1^+} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = \lim_{x\to -1^+} \frac{-x^2+x+2}{x+1} = 3 \\ f\,'_-(2) = \lim_{x\to 2^-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{-x^2+x+2}{x-2} = -3 \\ f\,'_+(2) = \lim_{x\to 2^+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{x^2-x-2}{x-2} = 3 \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{c} f\,'(-1) \nexists \\ f\,'(2) \nexists \end{array} . \end{array}\right]$$

9. Nájdite rovnicu dotyčnice a normály ku grafu funkcie $f\,(x) = e^{-x}\cos 2x$ v bode $A = (0, ?)$.

   $[A = (0,1)\,,\ t : x + y - 1 = 0,\ n : x - y + 1 = 0]$

10. Nájdite rovnicu dotyčnice a normály ku grafu funkcie $f\,(x) = \ln(x+1)$ v bode $A = (0, ?)$.

    $[A = (0,0)\,,\ t : x - y = 0,\ n : x + y = 0]$

11. Ku grafu funkcie $f\,(x) = x \ln x$ nájdite rovnicu normály, ktorá je rovnobežná s priamkou $p : 2x - 2y + 3 = 0.$ $\left[n : y - x + 3e^{-2} = 0\right]$

12. Zistite, či Rolleho veta platí pre funkciu $f(x) = 1 - \sqrt[5]{x}$ na intervale $\langle -1, 1\rangle$.

$$\left[\begin{array}{c} \text{Overíme, či sú splnené predpoklady Rolleho vety:} \\ \text{a) } f \ \text{ je spojitá na intervale } \langle -1, 1\rangle, \\ \text{b) } f \ \textit{nie je} \text{ diferencovateľná na } (-1,1)\,, \text{ pretože } f\,'(x) = -\frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}} \text{ ak } x \neq 0, \text{ ale } f\,'(0) \nexists, \\ \text{predpoklady Rolleho vety nie sú splnené,} \\ \text{teda Rolleho veta pre danú funkciu a interval neplatí.} \end{array}\right]$$

13. Vypočítajte limitu $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{\arcsin x - x}$. : $[-1,$ použite L' Hospitalovo pravidlo$]$

14. Vypočítajte limitu $\lim_{x\to 0^+} (e^x - 1)\operatorname{cotg} x$.

    $\left[0,\ \text{použite L' Hospitalovo pravidlo: } \lim_{x\to 0^+} \frac{(e^x-1)\cos x}{\sin x}\right]$

15. Vypočítajte limitu $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{4}\right)$.

    $\left[-\frac{4}{\pi},\ \text{použite L' Hospitalovo pravidlo: } \lim_{x\to 2} \frac{\left(x^2-4\right)\sin\left(\frac{\pi x}{4}\right)}{x^2\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)}\right]$

7 Priebežné písomné zadanie č.6.

1. Zistite priebeh funkcie $f(x) = \frac{2x-1}{(x-1)^2}$ a načrtnite jej graf.

   [1) $D(f) = \boldsymbol{R}\backslash\{1\} = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$, $f(\frac{1}{2}) = 0$, spojitá, $\lim_{x\to 1} \frac{2x-1}{(x-1)^2} = \infty$, priamka $x = 1$ je vertikálna asymptota.

   2) Platí $-1 \in D(f) \Rightarrow 1 \notin D(f)$. Funkcia nie je ani párna, ani nepárna.

   3) Pretože má iba jeden nulový bod (viď 1)) nie je periodická.

   4) $f'(x) = -\frac{2x}{(x-1)^3}$, ak $x \in (-\infty, 0)$ $f'(x) < 0$ klesajúca, ak $x \in (0, 1)$ $f'(x) > 0$ rastúca, ak $x \in (1, \infty)$ $f'(x) < 0$ klesajúca.

   5) $f(0) = -1 = \text{lokmin}\, f(x) = \min_{x\in D(f)} f(x)$.

   6) $f''(x) = \frac{4x+2}{(x-1)^4}$, ak $x \in (-\infty, -\frac{1}{2})$ $f''(x) < 0$ konkávna, ak $x \in (-\frac{1}{2}, 1)$ $f''(x) > 0$ konvexná, ak $x \in (1, \infty)$ $f''(x) > 0$ konvexná.

   7) V bode $x = -\frac{1}{2}$, $f(-\frac{1}{2}) = -\frac{8}{9}$ je inflexný bod.

   8) $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x-1}{(x-1)^2} = 0$. Priamka $y = 0$ je asymptota v bode ∞ aj $-\infty$. Graf načrtnite sami s použitím bodov 1)-8). $H(f) = \langle -1, \infty)$.]

2. Zistite priebeh funkcie $f(x) = \frac{1+\ln x}{x}$ a načrtnite jej graf.

   [1) $D(f) = (0, \infty)$, $f(\frac{1}{e}) = 0$, spojitá (podiel dvoch spojitých). 2) Platí $D(f) = (0, \infty)$. Funkcia nie je ani párna, ani nepárna. 3) Pretože má iba jeden nulový bod (viď 1)) nie je periodická. 4) $f'(x) = -\frac{\ln x}{x^2}$, ak $x \in (0, 1)$ $f'(x) > 0$ rastúca, ak $x \in (1, \infty)$ $f'(x) < 0$ klesajúca. 5) $f(1) = 1 = \max_{x\in D(f)} f(x)$. 6) $f''(x) = \frac{2\ln x - 1}{x^3}$, ak $x \in (0, e^{\frac{1}{2}})$ $f''(x) < 0$ konkávna, ak $x \in (e^{\frac{1}{2}}, \infty)$ $f''(x) > 0$ konvexná. 7) V bode $x = e^{\frac{1}{2}}$, $f(e^{\frac{1}{2}}) = \frac{3}{2}e^{-\frac{1}{2}}$ je inflexný bod. 8) $\lim_{x\to 0^+} \frac{1+\ln x}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} \ln x + 1 = -\infty$. Priamka $x = 0$ je vertikálna asymptota funkcie. $\lim_{x\to\infty} \frac{1+\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$. Priamka $y = 0$je asymptota v bode ∞. Graf načrtnite sami s použitím bodov 1)-8). $H(f) = (-\infty, 1\rangle$.]

3. Zistite priebeh funkcie $f(x) = (1 - 3x)\, e^{2x}$ a načrtnite jej graf. [viď maonline]

4. Zistite priebeh funkcie $f(x) = \frac{x^2-6x+3}{x-3}$ a načrtnite jej graf. [viď maonline]

5. Zistite priebeh funkcie $f(x) = \ln\left(4 - x^2\right)$ a načrtnite jej graf. [viď maonline]