3 Vlastné čísle a vlastné vektory štvorcových matíc

3.1 Riešené príklady

1. Nájdtite charakteristický polynóm matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3, & 1, & -1 \\ 0, & 2, & 0 \\ 1, & 1, & 1 \end{pmatrix}$.

   Riešenie.
   $$p_{\mathbf{A}}(\lambda) = |\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = \begin{vmatrix} 3-\lambda, & 1, & -1 \\ 0, & 2-\lambda, & 0 \\ 1, & 1, & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \begin{vmatrix} 3-\lambda, & -1 \\ 1, & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$
   $$= (2-\lambda)[(3-\lambda)(1-\lambda)+1] = (2-\lambda)(4-4\lambda+\lambda^2) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 12\lambda + 8$$

2. Nájdite vlastné čísla a vlastné vektory matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4, & -5, & 7 \\ 1, & -4, & 9 \\ -4, & 0, & 5 \end{pmatrix}$.

   Riešenie. Najprv určíme charakteristický polynóm matice $\mathbf{A}$.
   $$p_{\mathbf{A}}(\lambda) = |\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = \begin{vmatrix} 4-\lambda, & -5, & 7 \\ 1, & -4-\lambda, & 9 \\ -4, & 0, & 5-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 17\lambda + 13$$

   Jeho korene $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2+3i,\ \lambda_3 = 2-3i$ sú vlastné čísla matice $\mathbf{A}$. Vlastný vektor $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{C}^{3\times 1}$ prislúchajúci k vlastnému číslu λ, určíme ako nenulové riešenie sústavy lineárnych rovníc, ktorej maticový zápis je
   $$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$$

   Tento systém vyriešime tak, že upravíme jeho maticu na redukovanú, z ktorej už priamo určíme príslušné riešenie.

   1. $\lambda_1 = 1$:
   $$\begin{aligned} \mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I} &= \begin{pmatrix} 3, & -5, & 7 \\ 1, & -5, & 9 \\ -4, & 0, & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1, & 0, & -1 \\ 1, & -5, & 9 \\ 3, & -5, & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1, & 0, & -1 \\ 0, & -5, & 10 \\ 0, & -5, & 10 \end{pmatrix} \sim \\ &\sim \begin{pmatrix} 1, & 0, & -1 \\ 0, & 1, & -2 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

   Nenulovým riešením systému a teda vlastným vektorom prislúchajúcim vlastnému číslu $\lambda_1 = 1$ je
   $$\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} t \\ 2t \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$
   kde $t \in \boldsymbol{C},\ t \neq 0$.

2. $\lambda_2 = 2 + 3i$:

$$\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 2-3i, & -5, & 7 \\ 1, & -6-3i, & 9 \\ -4, & 0, & 3-3i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1, & -6-3i, & 9 \\ 0, & 16-12i, & -11+27i \\ 0, & -24-12i, & 39-3i \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1, & -6-3i, & 9 \\ 0, & 16-12i, & -11+27i \\ 0, & -40, & 50-30i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1, & -6-3i, & 9 \\ 0, & -4, & 5-3i \\ 0, & 20-12i, & 34 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1, & -6-3i, & 9 \\ 0, & 1, & \frac{5-3i}{-4} \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1, & 0, & \frac{-3+3i}{4} \\ 0, & 1, & \frac{5-3i}{-4} \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}$$

Vlastným vektorom prislúchajúcim k vlastnému číslu $\lambda_2 = 2 + 3i$ je každý vektor

$$\boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} (3-3i)t \\ (5-3i)t \\ 4t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 3-3i \\ 5-3i \\ 4 \end{pmatrix},$$

kde $t \in \boldsymbol{C}$, $t \neq 0$.

3. Podobne ako v prípade 2 vypočítame, že vlastné vektory prislúchajúce k vlastnému číslu $\lambda_3 = 2 - 3i$ sú

$$\boldsymbol{u}_3 = \begin{pmatrix} (3+3i)t \\ (5+3i)t \\ 4t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 3+3i \\ 5+3i \\ 4 \end{pmatrix},$$

kde $t \in \boldsymbol{C}$, $t \neq 0$.

3. Vypočítajte vlastné čísla a vlastné vektory matíc

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2, & 1, & 0, & 0 \\ 0, & 2, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 2, & 1 \\ 0, & 0, & 0, & 2 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2, & 1, & 0, & 0 \\ 0, & 2, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 2, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 2 \end{pmatrix}, \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2, & 1, & 0, & 0 \\ 0, & 2, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 2, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 2 \end{pmatrix}.$$

Riešenie. Pre charakteristické polynómy všetkých troch matíc platí

$$p_{\mathbf{A}} = p_{\mathbf{B}} = p_{\mathbf{D}} = (2 - \lambda)^4,$$

odkiaľ vyplýva, že každá z týchto matíc má len jedno vlastné číslo, $\lambda = 2$. Nájdime k nemu prislúchajúce vlastné vektory matice $\mathbf{A}$. Riešme teda maticovú rovnicu (sústavu lineárnych rovníc) $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$:

$$\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 0, & 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 1 \\ 0, & 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}$$

Nenulovým riešením sú vektory

$$\boldsymbol{u}_{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} t, 0, 0, 0 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Pre maticu **B** dostávame:

$$\mathbf{B} - \lambda \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 0, & 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{u}_{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \\ s \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ t, s \neq 0$$

a pre maticu **D**:

$$\mathbf{D} - \lambda \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 0, & 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{u}_{\mathbf{D}} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ r \\ s \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ t, r, s \neq 0$$

Všimnite si, že matica **A** má jeden lineárne nezávislý vlastný vektor, matica **B** má dva a matica **D** tri lineárne nezávislé vlastné vektory.

3.2 Cvičenia

1. Nájdite charakteristické polynómy matíc
(a) $\begin{pmatrix} 3, & 0 \\ 8, & -1 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} 10, & -9 \\ 4, & -2 \end{pmatrix}$, (c) $\begin{pmatrix} 0, & 3 \\ 4, & 0 \end{pmatrix}$, (d) $\begin{pmatrix} -2, & -7 \\ 1, & 2 \end{pmatrix}$, (e) $\begin{pmatrix} 0, & 0 \\ 0, & 0 \end{pmatrix}$.

2. Nájdite vlastné čísla a vlastné vektory matíc z cvičenia 1.

3. Nájdite charakteristické polynómy matíc
(a) $\begin{pmatrix} 4, & 0, & 1 \\ -2, & 1, & 0 \\ -2, & 0, & 1 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} 3, & 0, & -5 \\ \frac{1}{5}, & -1, & 0 \\ 1, & 1, & -2 \end{pmatrix}$, (c) $\begin{pmatrix} -2, & 0, & 1 \\ -6, & -2, & 0 \\ 19, & 5, & -4 \end{pmatrix}$,
(d) $\begin{pmatrix} -1, & 0, & 1 \\ -1, & 3, & 0 \\ -4, & 13, & -1 \end{pmatrix}$, (e) $\begin{pmatrix} 5, & 0, & 1 \\ 1, & 1, & 0 \\ -7, & 1, & 0 \end{pmatrix}$, (f) $\begin{pmatrix} 5, & 6, & 2 \\ 0, & -1, & -8 \\ 1, & 0, & -2 \end{pmatrix}$.

4. Nájdite vlastné čísla a vlastné vektory matíc z cvičenia 3.

3.3 Výsledky

1. (a) $\lambda^2 - 2\lambda - 3$. (b) $\lambda^2 - 8\lambda + 16$. (c) $\lambda^2 - 12$. (d) $\lambda^2 + 3$. (e) λ^2. **2.** (a) $\lambda_1 = 3$, $\boldsymbol{u}_1 = s(1,2)^T,\ s \neq 0$, $\lambda_2 = -1$, $\boldsymbol{u}_2 = s(0,1)^T,\ s \neq 0$. (b) $\lambda = 4$, $\boldsymbol{u} = s(3,2)^T,\ s \neq 0$. (c) $\lambda_1 = \sqrt{12}$, $\boldsymbol{u}_1 = s(3, \sqrt{12})^T,\ s \neq 0$, $\lambda_2 = -\sqrt{12}$, $\boldsymbol{u}_2 = s(-3, \sqrt{12})^T,\ s \neq 0$. (d) $\lambda_1 = i\sqrt{3}$, $\boldsymbol{u}_1 = s(-2 + i\sqrt{3}, 1)^T,\ s \neq 0$, $\lambda_2 = \overline{\lambda}_1 = -i\sqrt{3}$, $\boldsymbol{u}_2 = \overline{\boldsymbol{u}}_1 = s(-2 - i\sqrt{3}, 1)^T,\ s \neq 0$. (e) $\lambda = 0$, $\boldsymbol{u}_1 = (s,t)^T = s(1,0)^T + t(0,1)^T,\ t \neq 0$ alebo $s \neq 0$. **3.** (a) $-\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6$. (b) $-\lambda^3 + 2\lambda$. (c) $-\lambda^3 - 8\lambda^2 - \lambda - 8$. (d) $-\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 2$. (e) $-\lambda^3 + 6\lambda^2 - 12\lambda + 8$. (f) $-\lambda^3 + 2\lambda^2 + 15\lambda - 36$. **4.** (a) $\lambda_1 = 1$, $\boldsymbol{u}_1 = s(0,1,0)^T$, $s \neq 0$, $\lambda_2 = 2$, $\boldsymbol{u}_2 = s(-1,2,2)^T$, $s \neq 0$, $\lambda_3 = 3$, $\boldsymbol{u}_3 = s(-1,1,1)^T,\ s \neq 0$. (b) $\lambda_1 = 0$, $\boldsymbol{u}_1 = s(5,1,3)^T,\ s \neq 0$, $\lambda_2 = \sqrt{2}$, $\boldsymbol{u}_2 = s(15+5\sqrt{2}, -1+2\sqrt{2}, 7)^T,\ s \neq 0$, $\lambda_3 = -\sqrt{2}$, $\boldsymbol{u}_3 = s(15-5\sqrt{2}, -1-2\sqrt{2}, 7)^T,\ s \neq 0$. (c) $\lambda = 8$, $\boldsymbol{u} = s(1,1,-6)^T,\ s \neq 0$. (d) $\lambda = 2$, $\boldsymbol{u} = s(1,1,3)^T,\ s \neq 0$. (e) $\lambda = 2$, $\boldsymbol{u} = s(1,1,-3)^T,\ s \neq 0$. $\lambda_1 = -4$, $\boldsymbol{u}_1 = s(-6,8,3)^T,\ s \neq 0$, $\lambda_2 = 3$, $\boldsymbol{u}_3 = s(5,-2,1)^T,\ s \neq 0$.