LINEÁRNA ALGEBRA

RNDr. Peter Kaprálik, PhD.
KM FEI STU, Ilkovičova 3, 812 19 Bratislava
18. 11. 2001

1. Racionálne funkcie

Definícia 1.1. Komplexná funkcia

$$F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

kde $f,\ g$ sú polynómy, $g \neq \mathbf{0}$, sa nazýva *racionálna funkcia.* Ak $\mathrm{st}(f) < \mathrm{st}(g)$, funkcia F sa nazýva *rýdzoracionálna.*

Poznámka 1.1. Definičným oborom racionálnej funkcie F je množina $\mathbf{C} \setminus \{x \in \mathbf{C};\ g(x) = 0\}$.

Príklad 1.1. Funkcie

$$F(x) = \frac{2x^3 - ix + 1}{x^2 + (2-i)x + 2}, \qquad G(x) = \frac{x^2 + 4x + 1}{3x^5 - x^3 + x^2 + 2}$$

sú racionálne, funkcia G je rýdzoracionálna.

■

Poznámka 1.2. Ak $f, g \in P(\mathbf{R})$, hovoríme o *reálnej racionálnej* funkcii, ak $f, g \in P(\mathbf{C})$, hovoríme o *komplexnej racionálnej* funkcii.

Definícia 1.2. *Elementárnym zlomkom nad* $\mathbf{C}$ (*komplexným elementárnym zlomkom*) nazývame každú racionálnu funkciu

$$F(x) = \frac{a}{(x-\alpha)^k}$$

kde $a, \alpha \in \mathbf{C},\ k \in \mathbf{N}$.

Elementárnym zlomkom nad $\mathbf{R}$ (*reálnym elementárnym zlomkom*) nazývame každú racionálnu funkciu

$$F(x) = \frac{a}{(x-\alpha)^k}$$

kde $a, \alpha \in \mathbf{R},\ k \in \mathbf{N}$ a

$$G(x) = \frac{ax + b}{(x^2 + px + q)^k}$$

kde $a, b, p, q \in \mathbf{R},\ k \in \mathbf{N}$, polynóm $x^2 + px + q$ nemá reálne korene.

Veta 1.1. Každá komplexná (resp. reálna) racionálna funkcia sa dá vyjadriť v tvare súčtu komplexného (resp. reálneho) polynómu a konečného počtu elementárnych zlomkov nad $\mathbf{C}$ (resp. $\mathbf{R}$)

□

Tomuto tvaru racionálnej funkcie hovoríme *rozklad racionálnej funkcie na elementárne zlomky nad* $\mathbf{C}$ (resp. $\mathbf{R}$).

Postup pri rozklade racionálnej funkcie $H(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ na elementárne zlomky nad $\mathbf{C}$ (resp. $\mathbf{R}$):

(1) Vykonáme delenie polynómov $f,\ g$ so zvyškom:

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x), \quad \mathrm{st}(r) < \mathrm{st}(g)$$

odkiaľ

$$H(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)}$$

Tým sme získali vyjadrenie racionálnej funkcie H v tvare súčtu polynómu a rýdzoracionálnej funkcie.

(2) Nájdeme kanonický rozklad polynómu g nad $\mathbf{C}$ (resp. $\mathbf{R}$).

(3) Rýdzoracionálnu funkciu $\frac{r(x)}{g(x)}$ rozpíšeme na súčet elementárnych zlomkov tak, že ku každému činiteľu z kanonického rozkladu polynómu g (okrem najvyššieho koeficienta) pridávame zlomky:

$$(x-\alpha)^k \quad \longrightarrow \quad \frac{a_1}{x-\alpha} + \frac{a_2}{(x-\alpha)^2} + \cdots + \frac{a_k}{(x-\alpha)^k}$$

$$\left(x^2+px+q\right)^k \quad \longrightarrow \quad \frac{b_1x+c_1}{x^2+px+q} + \frac{b_2x+c_2}{\left(x^2+px+q\right)^2} + \cdots + \frac{b_kx+c_k}{\left(x^2+px+q\right)^k}$$

(4) Vypočítame koeficienty $a_j,\ b_j,\ c_j$.

Príklad 1.2. Rozložte na elementárne zlomky nad $\mathbf{C}$ racionálnu funkciu

$$G(x) = \frac{x^3+2x^2-x}{2(x+1)^2(x^2+1)}$$

Riešenie

Funkcia G je rýdzoracionálna, preto nie je potrebné vykonať delenie. Kanonický rozklad menovateľa je

$$2(x+)^2(x-i)(x+i)$$

Funkciu G môžeme preto vyjadriť v tvare

$$\frac{x^3+2x^2-x}{2(x+1)^2(x-i)(x+i)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{(x+1)^2} + \frac{c}{x-i} + \frac{d}{x+i}$$

kde $a, b, c, d \in \mathbf{C}$. Koeficienty a, b, c, d vypočítame tak, že predchádzajúcu rovnosť vynásobíme menovateľom racionálnej funkcie G, čím dostaneme rovnosť polynómov

$$x^3+2x^2-x = 2a(x+1)(x-i)(x+i) + 2b(x-i)(x+i) + 2c(x+1)^2(x+i) + 2d(x+1)^2(x-i)$$

Úpravou polynómu na pravej strane rovnovnosti na normálny tvar dostaneme

$$\begin{aligned} x^3+2x^2-x = {} & (2a+2c+2d)x^3 + (2a+2b+4c+2ci+4d-2di)x^2 + \\ & + (2a+2c+4ci+2d-4di)x + 2a+2b+2ci-2di \end{aligned}$$

Táto rovnosť je splnená práve vtedy keď

$$\begin{aligned} 1 &= 2a+2c+2d \\ 2 &= 2a+2b+4c+2ci+4d-2di \\ -1 &= 2a+2c+4ci+2d-4di \\ 0 &= 2a+2b+2ci-2di \end{aligned}$$

Vyriešením tejto sústavy rovníc dostaneme $a = 0,\ b = \frac{1}{2},\ c = \frac{1+i}{4},\ d = \frac{1-i}{4}$ a môžeme napísať rozklad funkcie G na elementárne zlomky nad $\mathbf{C}$:

$$\frac{x^3+2x^2-x}{2(x+1)^2(x-i)(x+i)} = \frac{1}{2(x+1)^2} + \frac{1+i}{4(x-i)} + \frac{1-i}{4(x+i)}$$

Uvedieme si druhý spôsob výpočtu koeficientov $a,\ b,\ c,\ d$. Stačí si uvedomiť, že rovnosť

$$x^3+2x^2-x = 2a(x+1)(x-i)(x+i) + 2b(x-i)(x+i) + 2c(x+1)^2(x+i) + 2d(x+1)^2(x-i)$$

je pravdivá pre každé $x \in \mathbf{C}$. Dosadením konkrétnych hodnôt za x do tejto rovnosti dostaneme sústavu rovníc, z ktorej vypočítame hľadané koeficienty. Výhodné je dosadzovať korene menovateľa racionálnej funkcie G, v našom prípade čísla $-1,\ i,\ -i$:

$$\begin{aligned}
x = -1: &\quad -1+2+1 = 2b(-1-i)(-1+i)\\
x = i: &\quad -i-2-i = 2c(1+i)^2 2i\\
x = -i: &\quad i-2+i = 2d(1-i)^2(-2i)
\end{aligned}$$

Odtiaľto ľahko vypočítame $b,\ c,\ d$. Na výpočet koeficienta a použijeme niektorú z predchádzajúcich rovníc, ktoré sme získali porovnaním koeficientov rovnakých polynómov alebo dosadíme do týchto polynómov za x hocijaké číslo, napr.

$$x = 0: \quad 0 = 2a(-i)i + 2b(-i)i + 2ci + 2d(-i)$$

a odtiaľ vypočítame a.

■

Príklad 1.3. Rozložte na elementárne zlomky nad $\mathbf{R}$ racionálnu funkciu

$$G(x) = \frac{x^3+2x^2-x}{2(x+1)^2(x^2+1)}$$

Riešenie

V tomto prípade máme hotový už aj kononický rozklad menovateľa nad $\mathbf{R}$ a môžeme písať rozklad racionálnej funkcie:

$$\frac{x^3+2x^2-x}{2(x+1)^2(x^2+1)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{(x+1)^2} + \frac{cx+d}{x^2+1}$$

Po vynásobení menovateľom racionálnej funkcie dostaneme

$$x^3+2x^2-x = 2a(x+1)(x^2+1) + 2b(x^2+1) + 2(cx+d)(x+1)^2$$

Dosaďme sem reálne korene menovateľa racionálnej funkcie (môžu sa aj imaginárne, ale nie je to moc výhodné, lebo dostaneme rovnice s komplexnými koeficientami).

$$x = -1: \quad -1+2+1 = 2b(1+1)$$

odkiaľ $b = \frac{1}{2}$. Ďalšie rovnice získame porovnaním koeficientov polynómov, napr. stačí porovnať koeficienty pri $x^3,\ x,\ x^0$.

$$\begin{aligned}
x^3: &\quad 1 = 2a+2c\\
x: &\quad -1 = 2a+2c+4d\\
x^0: &\quad 0 = 2a+2b+2d
\end{aligned}$$

Vyriešením tejto sústavy dostaneme $a = 0,\ c = \frac{1}{2},\ d = -\frac{1}{2}$. Potom kanonický rozklad funkcie G nad $\mathbf{R}$ je

$$\frac{x^3+2x^2-x}{2(x+1)^2(x^2+1)} = \frac{1}{2(x+1)^2} + \frac{x-1}{2(x^2+1)}$$

■

Cvičenie 1.

(1) Rozložte na elementárne zlomky nad $\mathbf{C}$ (bez výpočtu koeficientov) racionálnu funkciu:

(a) $\dfrac{1}{(x^3-8)^2(x^4+4x^2+16)}$ $\left[\begin{array}{l}\frac{a}{(x-2)^2}+\frac{b}{x-2}+\frac{c}{(x+1+i\sqrt{3})^3}+\frac{d}{(x+1+i\sqrt{3})^2}+\\ +\frac{e}{x+1+i\sqrt{3}}+\frac{p}{(x+1-i\sqrt{3})^3}+\frac{q}{(x+1-i\sqrt{3})^2}+\frac{r}{x+1-i\sqrt{3}}+\\ +\frac{s}{x-1+i\sqrt{3}}+\frac{t}{x-1-i\sqrt{3}}\end{array}\right]$

(b) $\dfrac{3x^2+1}{(2x^3+4x^2)(x^2-4)}$ $\left[\frac{a}{x^2}+\frac{b}{x}+\frac{c}{(x+2)^2}+\frac{d}{x+2}+\frac{e}{x-2}\right]$

(c) $\dfrac{x+1}{(x^4-16)(x^3+8)}$ $\left[\frac{a}{(x+2)^2}+\frac{b}{x+2}+\frac{c}{x-2}+\frac{d}{x-2i}+\frac{e}{x+2i}+\frac{r}{x-1-i\sqrt{3}}+\frac{r}{x-1+i\sqrt{3}}\right]$

(2) Rozložte na elementárne zlomky nad $\mathbf{R}$ (bez výpočtu koeficientov) racionálnu funkciu:

(a) $\dfrac{1}{(x^3-8)^2(x^4+4x^2+16)}$ $\left[\frac{a}{(x-2)^2}+\frac{b}{x-2}+\frac{cx+d}{(x^2+2x+4)^3}+\frac{ex+p}{(x^2+2x+4)^2}+ +\frac{qx+r}{x^2+2x+4}+\frac{sx+t}{x^2-2x+4}\right]$

(b) $\dfrac{3x^2+1}{(2x^3+4x^2)(x^2-4)}$ $\left[\frac{a}{x^2}+\frac{b}{x}+\frac{c}{(x+2)^2}+\frac{d}{x+2}+\frac{e}{x-2}\right]$

(c) $\dfrac{x+1}{(x^4-16)(x^3+8)}$ $\left[\frac{a}{(x+2)^2}+\frac{b}{x+2}+\frac{c}{x-2}+\frac{dx+e}{x^2+4}+\frac{rx+s}{x^2-2x+4}\right]$

(3) Rozložte na elementárne zlomky nad $\mathbf{C}$ racionálnu funkciu:

(a) $\dfrac{4}{x^4-1}$ $\left[\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}+\frac{i}{x-i}-\frac{i}{x+i}\right]$

(b) $\dfrac{x^3+3x^2+(3+i)x+2}{(x+1)^3(x-i)}$ $\left[\frac{i}{(x+1)^3}+\frac{1}{x-i}\right]$

(c) $\dfrac{4x^2-12x+4}{(x^2-2x+2)^2}$ $\left[\frac{2-i}{(x-1+i)^2}+\frac{2+i}{(x-1-i)^2}\right]$

(d) $\dfrac{4x-i}{2x^3+2i}$ $\left[\frac{-i}{2(x-i)}+\frac{\sqrt{3}+i}{2x-\sqrt{3}+i}+\frac{-\sqrt{3}+i}{2x+\sqrt{3}+i}\right]$

(4) Rozložte na elementárne zlomky nad $\mathbf{R}$ racionálnu funkciu:

(a) $\dfrac{6x^2+7x+4}{2x^3+3x^2-1}$ $\left[\frac{4}{2x-1}-\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{x+1}\right]$

(b) $\dfrac{x^6-5x^5+13x^4-18x^3+12x^2-8x+12}{(x-2)(x^2-2x+2)^2}$ $\left[x+1+\frac{3}{x-2}+\frac{x-6}{(x^2-2x+2)^2}+\frac{2}{x^2-2x+2}\right]$

(c) $\dfrac{4x^5-8x^4+5x^3-x^2+x+1}{(2x^2-x)^2}$ $\left[x-1+\frac{6}{(2x-1)^2}-\frac{10}{2x-1}+\frac{1}{x^2}+\frac{5}{x}\right]$

(d) $\dfrac{x^6+x^5}{(x^3-1)(x^2+x+1)}$ $\left[x+\frac{x-1}{3(x^2+x+1)^2}+\frac{-11x+5}{9(x^2+x+1)}+\frac{2}{9(x-1)}\right]$

(e) $\dfrac{-x^4-3x^3+10x^2-4x+1}{(x-1)(x^4-x^3-x+1)}$ $\left[\frac{1}{(x-1)^3}+\frac{2}{x-1}+\frac{x-2}{x^2+x+1}\right]$