LINEÁRNA ALGEBRA

RNDr. Peter Kaprálik, PhD.
KM FEI STU, Ilkovičova 3, 812 19 Bratislava
2. 3. 2002

1. Analytická geometria v priestore

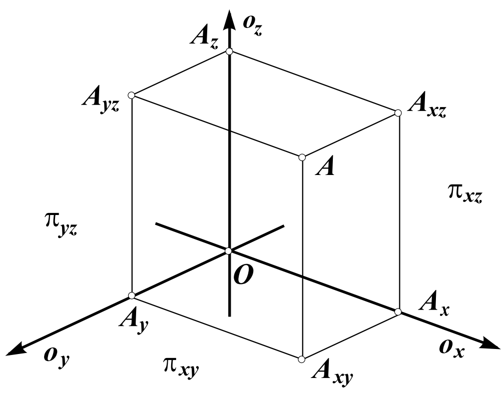
Geometriu je možné študovať dvomi metódami: *syntetickou* a *analytickou*. Syntetická pracuje priamo s geometrickými objektami. Túto metódu používali aj Gréci v staroveku a dosiahli vynikajúcich výsledkov. Vrcholným dielom boli Euklidove Základy ($\sigma\tau\omega\iota\chi\epsilon\iota\alpha$) z obdobia okolo roku 325 pred n.l., ktoré slúžili ako učebnica geometrie ďalších 2000 rokov.
Pri analytickej metóde sú geometrické objekty charakterizované číselnými údajmi a z nich sú vyvodzované geometrické vlastnosti. Za zakladateľa analytickej geometrie je považovaný R. Descartes (1596 - 1650), ktorý ju začal budovať systematicky ako matematickú disciplínu.

V celej tejto kapitole pod číslom budeme rozumieť reálne číslo. Ďalej predpokladáme, že zo strednej školy poznáte základné vlastnosti trojrozmerného euklidovského priestoru $\mathbf{E}_3$ a základy analytickej geometrie v rovine.

1.1. **Súradnicové sústavy v priestore.**

Karteziánska súradnicová sústava.

Nech sú v trojrozmernom euklidovskom priestore $\mathbf{E}_3$ dané 3 navzájom kolmé priamky o_x, o_y, o_z idúce bodom O. Na nich sú zvolené *jednotkové body* $J_1 \in o_x$, $J_2 \in o_y$, $J_3 \in o_z$ tak, že $|O, J_1| = |O, J_2| = |O, J_3| = 1$. Potom štvoricu (O, o_x, o_y, o_z) nazývame *karteziánskou súradnicovou sústavou* (v priestore $\mathbf{E}_3$), priamky o_x, o_y, o_z *súradnicovými osami* a bod O *začiatkom karteziánskej súradnicoej sústavy*. Priamky o_x, o_y určujú rovinu π_{xy}. Podobne sú definované roviny π_{yz}, π_{xz}. Premietnime bod $A \in \mathbf{E}_3$ kolmo do rovín π_{xy}, π_{yz}, π_{xz} a priemety označme v poradí A_{xy}, A_{yz}, A_{xz}. Potom bod A kolmo premietneme na priamky o_x, o_y, o_z a priemety označíme v poradí A_x, A_y, A_z (obr. 1)



Obr. 1

Pokiaľ A neleží v niektorej z rovín π_{xy}, π_{yz}, π_{xz}, tvoria body O, A_y, A_{xy}, A_x, A_z, A_{yz}, A, A_{xz} vrcholy pravouhlého hranola.
Nech

$$a_1 = \begin{cases} |O, A_x|, & \text{ak } A_x \text{ leží na polpriamke } OJ_1 \\ -|O, A_x|, & \text{ak } A_x \text{ neleží na polpriamke } OJ_1 \end{cases}$$

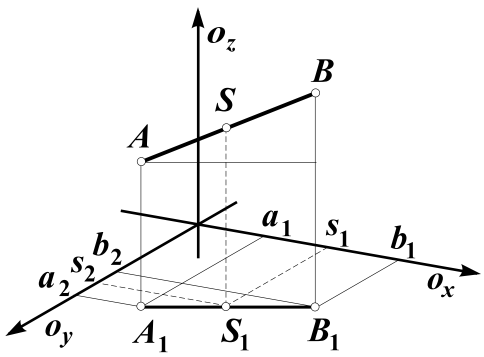
$$a_2 = \begin{cases} |O, A_y|, & \text{ak } A_y \text{ leží na polpriamke } OJ_2 \\ -|O, A_y|, & \text{ak } A_y \text{ neleží na polpriamke } OJ_2 \end{cases}$$

$$a_3 = \begin{cases} |O,\, A_z|, & \text{ak } A_z \text{ leží na polpriamke } OJ_3 \\ -|O,\, A_z|, & \text{ak } A_z \text{ neleží na polpriamke } OJ_3 \end{cases}$$

potom poloha bodu A v priestore je jednoznačne určená trojicou $(a_1,\, a_2,\, a_3)$, ktorú nazývame *súradnicami bodu* A. Týmto spôsobom je každému bodu $A \in \mathbf{E}_3$ priradená jediná trojica súradníc $(a_1,\, a_2,\, a_3)$ a každej takej trojici jediný bod z $\mathbf{E}_3$. To, že bod A má súradnice $(a_1,\, a_2,\, a_3)$, zapisujeme $A = (a_1,\, a_2,\, a_3)$.

Nech sú v $\mathbf{E}_3$ dané dva body $A = (a_1,\, a_2,\, a_3)$, $B = (b_1,\, b_2,\, b_3)$, potom na základe Pytagorovej vety pre *vzdialenosť* $|A,\, B|$ bodov A, B (obr. 2) platí

$$|A,\, B| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2}$$

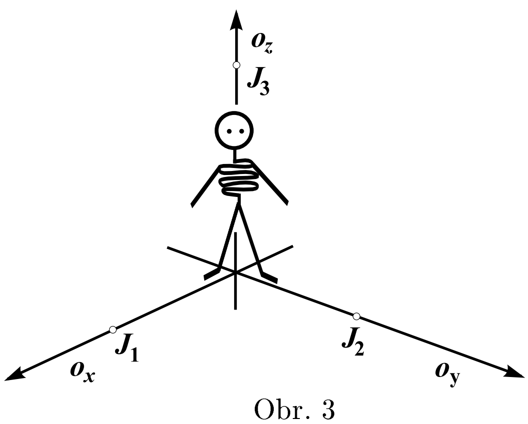


Obr. 2

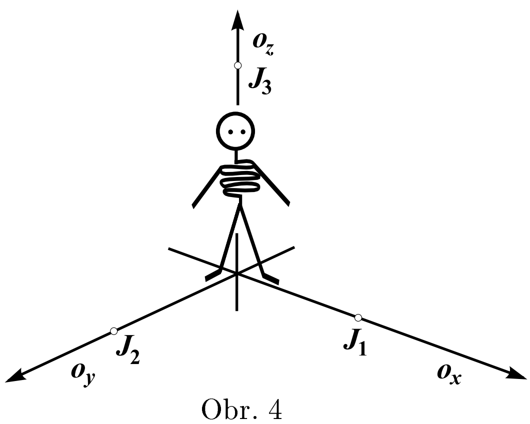
Pravouhlým premietaním sa stred úsečky premietne do stredu priemetu úsečky a stredom intervalu $\langle a,\, b\rangle$ je číslo $\frac{a+b}{2}$. Z týchto faktov pre stred $S = (s_1,\, s_2,\, s_3)$ úsečky AB (obr. 2) vyplýva

$$s_i = \frac{a_i + b_i}{2}, \text{ pre } i \in \{1,\, 2,\, 3\}, \text{ symbolicky: } S = \frac{A + B}{2}$$

I keď $\mathbf{E}_3$ nie je presným matematickým modelom priestoru, v ktorom žijeme, napriek tomu si mnohé reálne situácie znázorňujeme práve v $\mathbf{E}_3$. Dôvod je ten, že $\mathbf{E}_3$ s vyhovujúcou presnosťou lokálne nahrádza skutočný reálny priestor, v ktorom žijeme. Pretože v tomto svete sa ľudia už kedysi dávno dohodli na tom, čo je ľavá a pravá ruka, máme možnosť pomenovať existujúce dva rôzne typy karteziánskych súradnicových sústav v $\mathbf{E}_3$, líšiace sa od seba vzájomnou polohou súradnicových osí. Zaujmime teda „ľudské“ stanovisko. Uvažujme súradnicovú sústavu $(O,\, o_x,\, o_y,\, o_z)$. Predstavme si, že v bode O v smere polpriamky OJ_3 stojí pozorovateľ, ktorý sa díva na uhol polpriamok OJ_1, OJ_2. Ak má pozorovateľ polpriamku OJ_1 po pravej resp. po ľavej ruke, tak súradnicovú sústavu nazývame *pravotočivá* (obr. 3), resp. *ľavotočivá* (obr. 4).



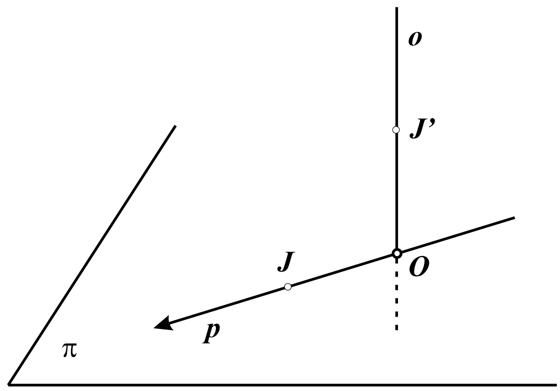
Obr. 3
Pravotočivá súradnicová sústava



Obr. 4
Ľavotočivá súradnicová sústava

Cylindrická súradnicová sústava.

Zvoľme v $\mathbf{E}_3$ rovinu π a priamku $o \perp \pi$. Nech ďalej $O = \pi \cap o$, priamka $p \subset \pi$, pričom $O \in p$ (obr. 5). Na priamkach p, o zvoľme body J, J' tak, že $|O, J| = |O, J'| = 1$. Štvoricu (O, polpriamka OJ, π, o) nazývame *cylindrická súradnicová sústava.*

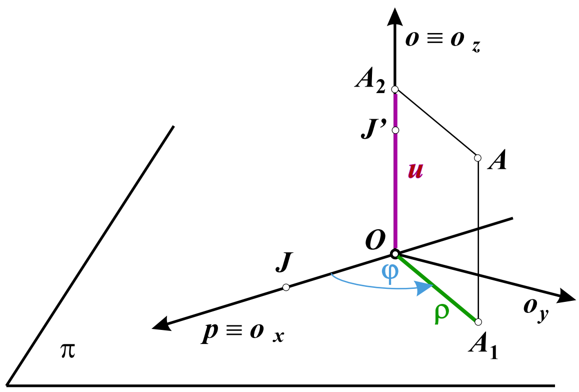


Obr. 5

Nech A je ľubovoľný bod priestoru $\mathbf{E}_3$, A_1 je jeho pravouhlý priemet do roviny π a A_2 zas jeho pravouhlý priemet do priamky o. Nech $\varrho = |A_1, O|$, $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$ je veľkosť uhla polpriamok OJ, OA_1, ak $A \notin o$, resp $\varphi = 0$, ak $A \in o$. Nech

$$u = \begin{cases} |O, A_2|, \text{ ak } A_2 \text{ leží na polpriamke } OJ' \\ -|O, A_2|, \text{ ak } A_2 \text{ neleží na polpriamke } OJ' \end{cases}$$

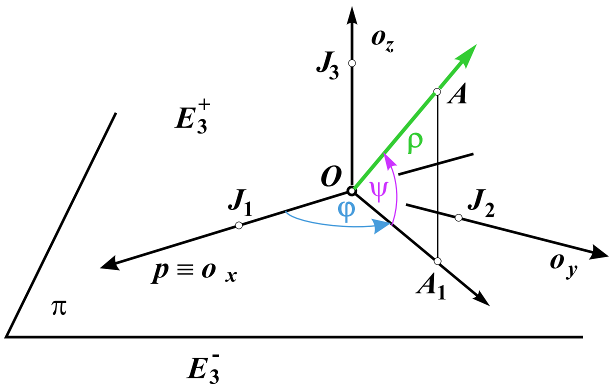
Takto každému bodu $A \in \mathbf{E}_3$ môžeme priradiť trojicu reálnych čísel (ϱ, φ, u), ktorú nazývame *cylindrické súradnice* bodu A, pričom $\varrho \in \langle 0, \infty)$, $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$, $u \in (-\infty, \infty)$.



Obr. 6

Zvoľme v $\mathbf{E}_3$ pravotočivú karteziánsku súradnicovú sústavu (O, o_x, o_y, o_z), kde $o_x = p$, $o_z = o$, body J, J' sú jednotkové body na osiach o_x, o_y (obr. 6). Potom pre karteziánske súradnice (x, y, z) bodu A, ktorého cylindrické súradnice sú (ϱ, φ, u), platí

$$\begin{aligned} x &= \varrho \cos \varphi \\ y &= \varrho \sin \varphi \\ z &= u \end{aligned}$$



Obr. 7

Sférická súradnicová sústava.

V $\mathbf{E}_3$ zvoľme rovinu π, priamku $p \subset \pi$ a body $O \in p$, $J_1 \in p$ tak, aby $|O,\, J_1| = 1$. Rovina π rozdeľuje priestor $\mathbf{E}_3$ na dva polpriestory, z ktorých jeden označme $\mathbf{E}_3^+$ a druhý $\mathbf{E}_3^-$ (obr. 7). Trojicu (O, polpriamka OJ_1, π) nazývame *sférická súradnicová sústava.*

Nech A je ľubovoľný bod priestoru $\mathbf{E}_3$ a A_1 je jeho pravouhlý priemet do roviny π. Definujme:

$\varrho = |O,\, A|$;

$\varphi \in \langle 0,\, 2\pi)$ je veľkosť kladne orientovaného uhla polpriamok OJ_1, OA_1 so začiatočným ramenom OJ_1, ak $A_1 \neq O$ a $\varphi = 0$, ak $A_1 = O$;

ψ je veľkosť kladne orientovaného uhla polpriamok OA_1, OA (začiatočným ramenom je OA_1), ak $A \in \mathbf{E}_3^+$, $A \neq O$, $A_1 \neq O$, pričom $\psi \in \langle 0,\, \frac{\pi}{2}\rangle$,
ψ je veľkosť záporne orientovaného uhla polpriamok OA_1, OA (začiatočným ramenom je OA_1), ak $A \in \mathbf{E}_3^-$, $A \neq O$, $A_1 \neq O$,, pričom $\psi \in \langle -\frac{\pi}{2},\, 0\rangle$,
$\psi = \frac{\pi}{2}$, ak $A \in \mathbf{E}_3^+$, $A \neq O$, $A_1 = O$,
$\psi = 0$, ak $A = O$,
$\psi = -\frac{\pi}{2}$, ak $A \in \mathbf{E}_3^-$, $A \neq O$, $A_1 = O$,

Takto každému bodu $A \in \mathbf{E}_3$ môžeme priradiť trojicu reálnych čísel $(\varrho,\, \varphi,\, \psi)$, ktorú nazývame *sférické súradnice* bodu A, pričom $\varrho \in \langle 0,\, \infty)$, $\varphi \in \langle 0,\, 2\pi)$, $\psi \in \langle -\frac{\pi}{2},\, \frac{\pi}{2}\rangle$.

Zvoľme v $\mathbf{E}_3$ pravotočivú karteziánsku súradnicovú sústavu $(O,\, o_x,\, o_y,\, o_z)$, kde $o_x = p$, $o_y \subset \pi$, $o_y \perp o_x$, $o_z \perp \pi$. Jednotkovými bodmi na súradnicových osiach o_x, o_y, o_z v uvedenom poradí sú body J_1, J_2, J_3, pričom $J_3 \in \mathbf{E}_3^+$. Potom pre karteziánske súradnice $(x,\, y,\, z)$ a sférické súradnice bodu A platí:

$$\begin{aligned} x &= \varrho \cos\varphi \cos\psi \\ y &= \varrho \sin\varphi \cos\psi \\ z &= \varrho \sin\psi \end{aligned}$$

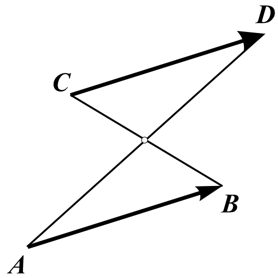
1.2. **Vektorový počet v trojrozmernom priestore.**

Vektor a jeho súradnice.

V priestore $\mathbf{E}_3$ zvoľme úsečku AB. Ak určíme poradie jej krajných bodov, napr., že A je prvým a B je druhým v poradí, tak túto úsečku označujeme $\overrightarrow{AB}$ a nazývame *orientovanou úsečkou.* Bod A je jej *začiatočným* a bod B *koncovým* bodom. Graficky ju znázorňujeme ako úsečku so šipkou pri koncovom bode. Medzi orientované úsečky budeme počítať aj tzv. *nulové orientované úsečky*, v ktorých začiatočný a koncový bod splývajú.

Definícia 1.1. Dve orientované úsečky $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ nazývame *ekvipolentné* a píšeme $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$, ak stredy úsečiek AD a BC sú totožné (Obr. 8).

Poznámka 1.1. Ak sú orientované úsečky $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ ekvipolentné, tak zrejme orientovaná úsečka $\overrightarrow{CD}$ vznikne z orientovanej úsečky $\overrightarrow{AB}$ rovnobežným posunutím. Teda v tomto posunutí sa



Obr. 8

začiatočný bod orientovanej úsečky $\overrightarrow{AB}$ zobrazí na začiatočný bod orientovanej úsečky $\overrightarrow{CD}$ a koncový bod sa zobrazí na koncový bod.

Definícia 1.2. Nech $\overrightarrow{AB}$ je ľubovoľná orientovaná úsečka v $\mathbf{E}_3$. Množina všetkých orientovaných úsečiek ekvipolentných s $\overrightarrow{AB}$ sa nazýva *vektor* v $\mathbf{E}_3$.

Vektory budeme označovať tak ako n-tice, teda $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{u}$, $\overline{w}$ apod. Ak $\overline{u}$ je vektor určený orientovanou úsečkou $\overrightarrow{AB}$, tak každú orientovanú úsečku $\overrightarrow{XY} \in \overline{u}$ (t.j. $\overrightarrow{XY} \sim \overrightarrow{AB}$) nazývame *reprezentantom vektora* $\overline{u}$, tiež hovoríme, že $\overrightarrow{XY}$ je *umiestnením vektora* $\overline{u}$ *do bodu* X. Vektor reprezentovaný nulovou orientovanou úsečkou $\overrightarrow{AA}$ nazývame *nulovým vektorom* a označujeme ho $\overline{0}$.

Nech $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{CD}$ sú reprezentanti vektorov $\overline{u}$ a $\overline{v}$. Potom, vzhľadom na definíciu vektora, možno rovnosť vektorov $\overline{u}$ a $\overline{v}$ charakterizovať takto:

$$\overline{u} = \overline{v} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$$

Majme v $\mathbf{E}_3$ zvolenú karteziánsku súradnicovú sústavu a nech body A, B, C, D majú v tejto súradnicovej sústave súradnice $A = (a_1, a_2, a_3)$, $B = (b_1, b_2, b_3)$, $C = (c_1, c_2, c_3)$, $D = (d_1, d_2, d_3)$.

Veta 1.1. Orientované úsečky $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{CD}$ sú ekvipolentné práve vtedy, keď

$$b_i - a_i = d_i - c_i \quad \text{pre všetky } i \in \{1, 2, 3\}$$

Dôkaz

Orientované úsečky $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{CD}$ sú ekvipolentné práve vtedy, keď stredy úsečiek AB a CD sú totožné, t.j. pre stred $S = (s_1, s_2, s_3)$ týchto úsečiek platí

$$s_i = \frac{a_i + b_i}{2} = \frac{c_i + d_i}{2} \quad \text{pre všetky } i \in \{1, 2, 3\}$$

Odtiaľ ihneď vyplýva tvrdenie vety.

□

Táto veta nám hovorí, že pre ľubovoľné orientované úsečky, ktoré reprezentujú ten istý vektor, je rozdiel súradníc koncového a začiatočného bodu stále rovnaký. To nám umožňuje definovať súradnice vektora.

Definícia 1.3. Nech orientovaná úsečka $\overrightarrow{AB}$, kde $A = (a_1, a_2, a_3)$, $B = (b_1, b_2, b_3)$, je reprezentantom vektora $\overline{u}$. Potom trojicu (u_1, u_2, u_3), kde

$$u_1 = b_1 - a_1, \qquad u_2 = b_2 - a_2, \qquad u_3 = b_3 - a_3$$

nazývame *súradnicami vektora* $\overline{u}$ a píšeme

$$\overline{u} = (u_1, u_2, u_3)$$

Teraz vieme každému vektoru jednoznačne priradiť trojicu čísel. Platí to aj naopak. Trojici (v_1, v_2, v_3) je priradený vektor reprezentovaný orientovanou úsečkou $\overrightarrow{OV}$, kde $O = (0, 0, 0)$, $V =$

(v_1, v_2, v_3). Na základe tohto môžeme povedať, že pre ľubovoľné dva vektory $\overline{u}$, $\overline{v}$, ktoré majú súradnice (u_1, u_2, u_3), (v_1, v_2, v_3) platí

$$\overline{u} = \overline{v} \quad \text{práve vtedy, keď} \quad (u_1, u_2, u_3) = (v_1, v_2, v_3)$$

Spôsob, akým sme zaviedli súradnice vektora, nás priam nabáda definovať rozdiel bodov a súčet bodu a vektora:

Definícia 1.4. *Rozdielom bodov* B, A, v uvedenom poradí, nazývame vektor $\overline{u}$, ktorý je reprezentovaný orientovanou úsečkou $\overrightarrow{AB}$ a píšeme

$$\overline{u} = B - A$$

Definícia 1.5. *Súčtom bodu* A a *vektora* $\overline{u}$ nazývame bod B, pre ktorý platí $\overline{u} = B - A$ a píšeme

$$B = A + \overline{u}$$

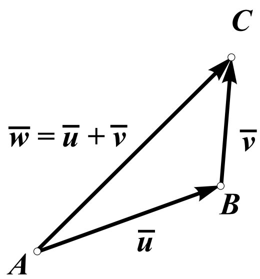
Dohodnime sa, že ak bod resp. vektor označíme nejakým písmenom (veľkým resp. malým s pruhom), tak jeho karteziánske súradnice budeme označovať (pokiaľ sa nedohodneme inak) tým istým (vždy malým) písmenom s indexami, napr. $M = (m_1, m_2, m_3)$, $\overline{e} = (e_1, e_2, e_3)$.

Základné operácie s vektormi.

Označme $\mathbf{V}(\mathbf{E}_3)$ množinu všetkých vektorov v $\mathbf{E}_3$. Na tejto množine budeme definovať súčet vektorov a násobok vektora reálnym číslom.

Definícia 1.6. Nech $\overline{u}$, $\overline{v}$ sú vektory určené orientovanými úsečkami $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ v uvedenom poradí. Potom vektor $\overline{w}$ reprezentovaný orientovanou úsečkou $\overrightarrow{AC}$ nazývame *súčtom vektorov* $\overline{u}$, $\overline{v}$ (obr. 9) a píšeme

$$\overline{w} = \overline{u} + \overline{v}$$



Obr. 9

Príklad 1.1. Daný je rovnobežnosten $ABCDA'B'C'D'$. Vyjadrime vrcholy tohto rovnobežnostena pomocou bodu A a vektorov $\overline{a} = B - A$, $\overline{b} = D - A$, $\overline{c} = A' - A$.

Riešenie

Z obrázku 10 priamo vidieť, že

$B = A + \overline{a}$,

$C - A = (B - A) + (C - B) = \overline{a} + \overline{b}$, odkiaľ $C = A + (\overline{a} + \overline{b})$,

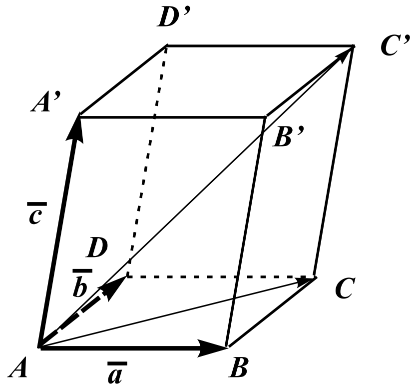
$D = A + \overline{b}$,

$A' = A + \overline{c}$,

$B' - A = \overline{a} + \overline{c}$

$C' - A = (C - A) + (C' - C) = (\overline{a} + \overline{b}) + \overline{c}$, odkiaľ $C' = A + [(\overline{a} + \overline{b}) + \overline{c}]$

■



Obr. 10

Poznámka 1.2. Na prvý pohľad by sa mohlo zdať, že súčet vektorov závisí od výberu umiestnenia vektora $\overline{u}$ do bodu A. Ukážeme, že tomu tak nie je.

$$\begin{aligned}\overline{w} &= C - A = (c_1 - a_1,\, c_2 - a_2,\, c_3 - a_3) = \\ &= (c_1 - b_1 + b_1 - a_1,\, c_2 - b_2 + b_2 - a_2,\, c_3 - b_3 + b_3 - a_3) = \\ &= (v_1 + u_1,\, v_2 + u_2,\, v_3 + u_3) = (u_1,\, u_2,\, u_3) + (v_1,\, v_2,\, v_3)\end{aligned}$$

Vidíme, že súradnice vektora $\overline{w}$ závisia len od súradníc vektorov $\overline{u}$ a $\overline{v}$ a tie nezávisia od výberu reprezentantov. Zároveň sme ukázali, že súradnice súčtu dvoch vektorov dotaneme ako súčet súradníc týchto vektorov, teda

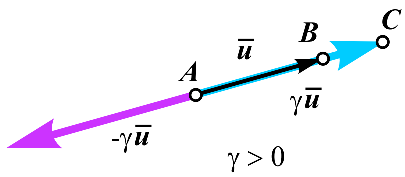
Veta 1.2. Pre každé dva vektory $\overline{u} = (u_1,\, u_2,\, u_3)$, $\overline{v} = (v_1,\, v_2,\, v_3)$ platí

$$\overline{u} + \overline{v} = (u_1 + v_1,\, u_2 + v_2,\, u_3 + v_3) = (u_1,\, u_2,\, u_3) + (v_1,\, v_2,\, v_3)$$

Definícia 1.7. Nech $\overrightarrow{AB}$ je reprezentant vektora $\overline{u}$ a γ je reálne číslo. Potom *súčinom čísla γ a vektora $\overline{u}$* nazývame vektor $\gamma \cdot \overline{u}$, ktorý definujeme takto:
Ak $\overline{u} = \overline{0}$ alebo $\gamma = 0$, tak $\gamma \cdot \overline{u} = \overline{0}$.
Ak $\overline{u} \neq \overline{0}$ a $\gamma \neq 0$, zostrojme bod C tak, aby pre veľkosť úsečiek AB a AC platila rovnosť

$$|A,\, C| = |\gamma||A,\, B|$$

pričom pre $\gamma > 0$ bod C leží na polpriamke AB a pre $\gamma < 0$ na polpriamke k nej opačnej. Súčinom $\gamma \cdot \overline{u}$ potom nazývame vektor určený orientovanou úsečkou $\overrightarrow{AC}$ (obr. 11).



Obr. 11

Veta 1.3. Pre každé $\gamma \in \mathbf{R}$ a každý vektor $\overline{u} = (u_1,\, u_2,\, u_3) \in \mathbf{V}(\mathbf{E}_3)$ platí

$$\gamma \cdot \overline{u} = (\gamma u_1,\, \gamma u_2,\, \gamma u_3)$$

Dôkaz

Ak $\gamma = 0$ alebo $\overline{u} = \overline{0}$, tak $\gamma \cdot \overline{u} = \overline{0} = (0,0,0)$ a taktiež $(\gamma u_1,\, \gamma u_2,\, \gamma u_3) = (0,0,0)$.

Nech $\gamma \neq 0$ a $\overline{u} \neq \overline{0}$. Umiestnime vektor $\overline{u}$ do začiatku O súradnicovej sústavy. Potom $\overline{u} = U - O$, pričom bod U má rovnaké súradnice ako vektor $\overline{u}$, teda $(u_1,\, u_2,\, u_3)$. Nech V je bod priamky OU, pre ktorý $|O,\, V| = |\gamma||O,\, U|$, pričom bod V leží na polpriamke OU, ak $\gamma > 0$, resp. na opačnej polpriamke k OU, ak $\gamma < 0$. Potom $\gamma \cdot \overline{u} = V - O = (v_1,\, v_2,\, v_3)$. Označme U_x, V_x pravouhlé priemety bodov U, V, v uvedenom poradí, do súradnicovej osi o_x. Body U_x, V_x majú na osi o_x súradnice v poradí u_1, v_1. Tieto čísla sú súčasne kladné alebo súčasne záporné,

ak je γ kladné, a sú opačného znamienka, ak je γ záporné. Dokážeme rovnosť $v_1 = \gamma u_1$.
V prípade, že priamka OU je kolmá na os o_x, platí $U_x = V_x = O$ čiže $u_1 = v_1 = 0$ a teda $v_1 = \gamma u_1$.
Ak priamky OU, o_x nie sú kolmé a ani totožné, tak trojuholníky OU_xU, OV_xV sú podobné a platí

$$|\gamma| = \frac{|O, V|}{|O, U|} = \frac{|O, V_x|}{|O, U_x|} = \frac{|v_1|}{|u_1|} = \left|\frac{v_1}{u_1}\right|$$

Táto rovnosť platí aj v prípade, keď sú priamky OU a o_x totožné. Vtedy totiž $U = U_x$ a $V = V_x$.
Z predošlých úvah vyplýva, že $\frac{v_1}{u_1}$ je kladné číslo práve vtedy, keď je γ kladné. Potom však

$$\gamma = \frac{v_1}{u_1}$$

odkiaľ

$$v_1 = \gamma u_1$$

Podobne sa dokáže: $v_2 = \gamma u_2$, $v_3 = \gamma u_3$.

□

Sčitovanie vektorov a násobenie vektora číslom pomocou súradníc je rovnaké ako sčitovanie n-tíc a násobenie n-tice číslom, preto zrejme platí

Veta 1.4. Pre každé $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z} \in \mathbf{V}(\mathbf{E}_3)$ a $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ platí

(1) $\overline{x} + \overline{y} = \overline{y} + \overline{x}$
(2) $(\overline{x} + \overline{y}) + \overline{z} = \overline{x} + (\overline{y} + \overline{z})$
(3) $\overline{x} + \overline{0} = \overline{x}$
(4) $\overline{x} + (-1) \cdot \overline{x} = \overline{0}$
(5) $1 \cdot \overline{x} = \overline{x}$
(6) $(\alpha\beta) \cdot \overline{x} = \alpha \cdot (\beta \cdot \overline{x})$
(7) $\alpha \cdot (\overline{x} + \overline{y}) = \alpha \cdot \overline{x} + \beta \cdot \overline{y}$
(8) $(\alpha + \beta) \cdot \overline{x} = \alpha \cdot \overline{x} + \beta \cdot \overline{x}$
(9) $\alpha \cdot \overline{x} = \overline{0}$ práve vtedy, keď $\alpha = 0$ alebo $\overline{x} = \overline{0}$

Poznámka 1.3.

(1) Vektor $(-1) \cdot \overline{x}$ sa nazýva *opačný vektor k vektoru* $\overline{x}$ a označuje sa $-\overline{x}$.
(2) Namiesto $\alpha \cdot \overline{x}$ budeme písať len $\alpha\overline{x}$.
(3) $\overline{x} + (-\overline{y})$ budeme skracovať na $\overline{x} - \overline{y}$.
(4) Množinu $\mathbf{V}(\mathbf{E}_3)$, spolu s operáciou súčtu vektorov a násobenia vektora reálnym číslom nazývame *vektorovým priestorom.*

Lineárna závislosť a nezávislosť vektorov.

Operácie súčtu vektorov a násobenia vektora číslom vo vektorovom priestore $\mathbf{V}(\mathbf{E}_3)$ majú rovnaké vlastnosti ako obdobné operácie v aritmetickom priestore $\mathbf{R}^3$. Preto môžeme vo vektorovom priestore zaviesť pojmy *lineárna kombinácia* vektorov, *lineárne závislosť* resp. *nezávislosť* vektorov rovnako ako v aritmetickom priestore.

Príklad 1.2. Ukážeme, že vektory $\overline{e}_i = J_i - O$, $i \in \{1, 2, 3\}$, kde J_1, J_2, J_3 sú jednotkové body na súradnicových osiach a O je začiatok súradnicovej sústavy, sú lineárne nezávislé.

Riešenie

Zistime, pre aké čísla α_1, α_2, α_3 je splnená rovnosť

$$\alpha_1\overline{e}_1 + \alpha_2\overline{e}_2 + \alpha_3\overline{e}_3 = \overline{0}$$

Ak sem dosadíme súradnice vektorov, dostaneme

$$\alpha_1(1, 0, 0) + \alpha_2(0, 1, 0) + \alpha_3(0, 0, 1) = (0, 0, 0)$$

odkiaľ

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0, 0, 0)$$

Všetky koeficienty α_i sú nulové, preto vektory $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$, $\overline{e}_3$ sú lineárne nezávislé.

■

Veta 1.5. Dva vektory sú lineárne závislé práve vtedy, keď ich možno umiestniť na jednu priamku.

Dôkaz

Dva vektory sú lineárne závislé práve vtedy, keď jeden z nich je násobkom druhého. Podľa definície súčinu čísla a vektora to je možné len keď oba vektory majú umiestnenie na jednej priamke.

□

Veta 1.6. Tri vektory sú lineárne závislé práve vtedy, keď sa dajú umiestniť do jednej roviny.

Dôkaz

Nech vektory $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{w}$ sú lineárne závislé. Potom jeden z nich je lineárnou kombináciou ostatných. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že

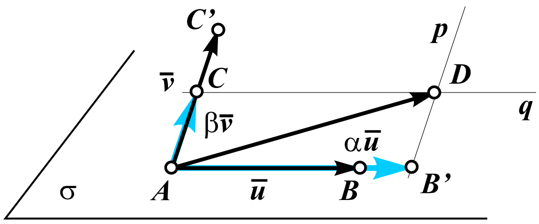
$$\overline{w} = \alpha\overline{u} + \beta\overline{v}$$

Nech $\overrightarrow{AB}$ je reprezentantom vektora $\overline{u}$ a $\overrightarrow{AB'}$ je reprezentantom vektora $\alpha\overline{u}$. Body A, B, B' zrejme ležia na jednej priamke, označme ju p. Nech ďalej $\overrightarrow{B'C}$ je reprezentantom vektora $\overline{v}$ a $\overrightarrow{B'C'}$ je reprezentantom vektora $\beta\overline{v}$. Aj v tomto prípade ležia body B', C, C' na jednej priamke, povedzme q. Priamky p, q sú buď rôznobežné alebo totožné. V oboch prípadoch ležia v tej istej rovine, označme ju ϱ. V rovine ϱ ležia aj orientované úsečky $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B'C'}$ a $\overrightarrow{AC'}$, čo sú reprezentanti vektorov v poradí $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{w}$.

Predpokladajme teraz, že vektory $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{w}$ je možné umiestniť do jednej roviny. Tú rovinu označme σ. Pre tieto vektory platí práve jedna z možností

(1) niektoré dva vektory sú lineárne závislé,
(2) každé dva vektory sú linárne nezávislé.

V prvom prípade sú lineárne závislé všetky tri vektory. Uvažujme, že nastala druhá možnosť. V tomto prípade sú všetky tri vektory nenulové. Nech $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ sú reprezentanti vektorov



Obr. 12

$\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{w}$ v uvedenom poradí, pričom $A, B, C, D \in \sigma$. Priamky AB, AC sú rôznobežné, lebo vektory $\overline{u} = B - A$, $\overline{v} = C - A$ sú lineárne nezávislé. Veďme bodom D priamku p rovnobežnú s priamkou AC a priamku q rovnobežnú s priamkou AB (obr. 12). Nech $B' = p \cap AB$, $C' = q \cap AC$. Potom existujú nenulové čísla α, β tak, že $\alpha\overline{u} = B' - A$, $\beta\overline{v} = C' - A$ a navyše $\overline{w} = D - A = \alpha\overline{u} + \beta\overline{v}$. To však znamená, že vektory $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{w}$ sú lineárne závislé.

□

Veta 1.7. Každé štyri vektory vektorového priestoru $\mathbf{V}(\mathbf{E}_3)$ sú lineárne závislé.

Dôkaz

Nech $\overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_3, \overline{u}_4 \in \mathbf{V}(\mathbf{E}_3)$. Ak sú prvé tri vektory lineárne závislé, tak sú lineárne závislé všetky štyri. Predpokladajme, že prvé tri vektory sú lineárne nezávislé. Zvoľme body A, B_1, B_2, B_3, B_4 tak, že $\overline{u}_i = B_i - A$ pre $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Potom priamky AB_1, AB_2, AB_3 sú rôznobežné a neležia v jednej rovine. Veďme bodom B_4 rovinu σ_1 rovnobežnú s priamkami AB_2, AB_3, rovinu σ_2 rovnobežnú s priamkami AB_1, AB_3 a rovinu σ_3 rovnobežnú s priamkami

AB_1, AB_2. Nech $B'_j = AB_j \cap \sigma_j$ pre $j \in \{1, 2, 3\}$. Potom zrejme existujú čísla β_j tak, že $B'_j - A = \beta_j \overline{u}_j$ a navyše $\overline{u}_4 = \beta_1\overline{u}_1 + \beta_2\overline{u}_2 + \beta_3\overline{u}_3$. Vektor $\overline{u}_4$ je lineárnou kombináciou ostatných vektorov, preto tieto vektory sú lineárne závislé.

□

Poznámka 1.4. Vo vektorovom priestore $\mathbf{V}(\mathbf{E}_3)$ sa používa aj nasledujúca terminológia:
Vektory $\overline{u}_1, \ldots, \overline{u}_k$ $(k \geq 2)$ sa nazývajú *kolineárne*, ak každé dva z nich sú lineárne závislé.
Vektory $\overline{u}_1, \ldots, \overline{u}_k$ $(k \geq 3)$ sa nazývajú *komplanárne*, ak každé tri z nich sú lineárne závislé.

Príklad 1.3. Zistime, či body $A = (1, -1, 1)$, $B = (2, 1, 4)$, $C = (3, 3, 7)$ ležia na jednej priamke.

Riešenie
Body A, B, C ležia na jednej priamke práve vtedy, keď sú vektory $B - A$, $C - A$ kolineárne. Keďže

$$B - A = (1, 2, 3),\ C - A = (2, 4, 6) = 2(1, 2, 3) = 2(B - A)$$

body A, B, C ležia na jednej priamke.

■

Definícia 1.8. Usporiadaná trojica lineárne nezávislých vektorov z $\mathbf{V}(\mathbf{E}_3)$ sa nazýva *usporiadaná báza.*

Veta 1.8. Nech $(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c})$ je usporiadaná báza. Potom každý vektor z $\mathbf{V}(\mathbf{E}_3)$ sa dá vyjadriť ako lineárna kombinácia prvkov $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$. Toto vyjadrenie je až na poradie sčítancov jednoznačné.

Dôkaz
Nech $\overline{u}$ je ľubovoľný vektor. Podľa predošlej vety sú vektory $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$, $\overline{u}$ lineárne závislé. Existujú teda čísla α, β, γ, υ, z ktorých aspoň jedno je nenulové, tak, že

$$\alpha\overline{a} + \beta\overline{b} + \gamma\overline{c} + \upsilon\overline{u} = \overline{0}$$

Ak by $\upsilon = 0$, znamenalo by to, že vektory $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ sú lineárne závislé, čo nie je pravda. Preto $\upsilon \neq 0$ a môžeme vyjadriť vektor $\overline{u}$:

$$\overline{u} = -\frac{\alpha}{\upsilon}\overline{a} - \frac{\beta}{\upsilon}\overline{b} - \frac{\gamma}{\upsilon}\overline{c}$$

Predpokladajme, že sú možné dve vyjadrenia:

$$\overline{u} = \alpha_1\overline{a} + \beta_1\overline{b} + \gamma_1\overline{c}$$
$$\overline{u} = \alpha_2\overline{a} + \beta_2\overline{b} + \gamma_2\overline{c}$$

Potom

$$\overline{0} = \overline{u} - \overline{u} = (\alpha_1 - \alpha_2)\overline{a} + (\beta_1 - \beta_2)\overline{b} + (\gamma_1 - \gamma_2)\overline{c}$$

Z lineárnej nezávislosti vektorov $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ vyplýva

$$\alpha_1 - \alpha_2 = 0,\ \beta_1 - \beta_2 = 0,\ \gamma_1 - \gamma_2 = 0$$

odkiaľ

$$\alpha_1 = \alpha_2,\ \beta_1 = \beta_2,\ \gamma_1 = \gamma_2$$

□

Rozoznávame dva typy usporiadaných báz. Umiestnime vektory usporiadanej bázy $(\overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_3)$ do spoločného bodu A. Ak pozorovateľ stojí v bode A v smere vektora $\overline{u}_3$ tak, že pred sebou vidí umiestnenia prvých dvoch vektorov usporiadanej bázy a umiestnenie vektora $\overline{u}_1$ je vľavo (resp. vpravo) od umiestnenia vektora $\overline{u}_2$, potom usporiadaná báza $(\overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_3)$ sa nazýva *ľavotočivá* (resp. *pravotočivá*). Dve bázy, ktoré sú obe buď pravotočivé alebo obe ľavotočivé, sa nazývajú *súhlasne orientované.* Dve bázy, z ktorých jedna je ľavotočivá a jedna pravotočivá, sa nazývajú

nesúhlasne orientované.
Nech pre vektory $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ platí

$$\begin{aligned}\overline{a} &= a_1\overline{u}_1 + a_2\overline{u}_2 + a_3\overline{u}_3\\ \overline{b} &= b_1\overline{u}_1 + b_2\overline{u}_2 + b_3\overline{u}_3\\ \overline{c} &= c_1\overline{u}_1 + c_2\overline{u}_2 + c_3\overline{u}_3\end{aligned}$$

Dá sa dokázať, že $(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c})$ je báza súhlasne (resp. nesúhlasne) orientovaná s bázou $(\overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_3)$ práve vtedy, keď determinant

$$\begin{vmatrix} a_1, & a_2, & a_3\\ b_1, & b_2, & b_3\\ c_1, & c_2, & c_3\end{vmatrix}$$

je kladný (resp. záporný).

1.3. Metrické vlastnosti vektorov v $\mathbf{E}_3$.

V tejto časti zavedieme do vektorového priestoru pojmy súvisiace s pojmami vzdialenosť či dĺžka a veľkosť uhla, ktoré sú definované v euklidovskom priestore $\mathbf{E}_3$. Aj teraz budeme pracovať v pevne zvolenej karteziánskej súradnicovej sústave (O, o_x, o_y, o_z).

Skalárny súčin.

Definícia 1.9. Nech $\overrightarrow{AB}$ je reprezentantom vektora $\overline{u}$. *Veľkosťou* (tiež *normou*) *vektora* $\overline{u}$ nazývame vzdialenosť bodov A, B. Vektor, ktorého veľkosť je 1, sa nazýva *jednotkový vektor*. Veľkosť vektora $\overline{u}$ budeme označovať $\|\overline{u}\|$.

Veta 1.9. Pre každý vektor $\overline{u}$ a každé reálne číslo α platí

(1) $\|\overline{u}\| \geq 0$
(2) $\|\overline{u}\| = 0$ práve vtedy, keď $\overline{u} = \overline{0}$
(3) $\|\alpha\overline{u}\| = |\alpha|\,\|\overline{u}\|$

Dôkaz
Vyplýva priamo z definície veľkosti vektora a definície súčinu čísla a vektora.

□

Príklad 1.4. Nech $\overline{u}$ je nenulový vektor, r je kladné reálne číslo. Nájdime všetky vektory $\overline{v}$, ktoré vyhovujú podmienkam

(1) vektory $\overline{u}$, $\overline{v}$ sú lineárne závislé,
(2) $\|\overline{u}\| = r$.

Riešenie
Keďže vektory $\overline{u}$, $\overline{v}$ sú lineárne závislé a $\overline{u} \neq \overline{0}$, existuje také $\alpha \in \mathbf{R}$, že $\overline{v} = \alpha\overline{u}$. Pre normu vektora $\overline{v}$ potom platí

$$r = \|\overline{v}\| = \|\alpha\overline{u}\| = |\alpha|\,\|\overline{u}\|$$

odkiaľ

$$|\alpha| = \frac{r}{\|\overline{u}\|}$$

Podmienkam (1) a (2) vyhovujú teda práve dva navzájom opačné vektory, a to

$$\overline{v}_1 = \frac{r}{\|\overline{u}\|}\overline{u} \qquad \text{a} \qquad \overline{v}_2 = -\frac{r}{\|\overline{u}\|}\overline{u}$$

■

Veta 1.10. Pre veľkosť vektora $\overline{u} = (u_1, u_2, u_3)$ platí

$$\|\overline{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$

Dôkaz

Nech $\overrightarrow{AB}$ je reprezentantom vektora $\overline{u}$. Potom $u_1 = b_1 - a_1$, $u_2 = b_2 - a_2$, $u_3 = b_3 - a_3$,

$$\|\overline{u}\| = |A,\, B| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$

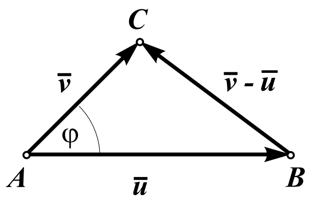
□

Definícia 1.10. Nech orientované úsečky $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{AC}$ sú reprezentantami vektorov $\overline{u}$ a $\overline{v}$. *Uhlom nenulových vektorov* $\overline{u}$, $\overline{v}$ nazývame veľkosť uhla polpriamok AB, AC. Budeme ho označovať $\angle(\overline{u},\, \overline{v})$.

Poznámka 1.5. Z definície vyplýva, že $\angle(\overline{u},\, \overline{v}) \in \langle 0,\, \pi\rangle$.

Definícia 1.11. *Skalárnym súčinom vektorov* $\overline{u}$, $\overline{v}$ nazývame číslo

$$\overline{u}.\overline{v} = \begin{cases} \|\overline{u}\|\,\|\overline{v}\| \cos\angle(\overline{u},\, \overline{v}), & \text{ak } \overline{u} \neq \overline{0},\ \overline{v} \neq \overline{0} \\ 0, & \text{ak } \overline{u} = \overline{0}, \text{ alebo } \overline{v} = \overline{0} \end{cases}$$



Obr. 13

Poznámka 1.6. Z definície skalárneho súčinu priamo vyplývajú vzorce na výpočet uhla nenulových vektorov $\overline{u}$, $\overline{v}$

$$\cos\angle(\overline{u},\, \overline{v}) = \frac{\overline{u}.\overline{v}}{\|\overline{u}\|\,\|\overline{v}\|}$$

a veľkosti ľubovoľného vektora $\overline{u}$

$$\|\overline{u}\| = \sqrt{\overline{u}.\overline{u}}$$

Ak použijeme označenie $\overline{u}^2 = \overline{u}.\overline{u}$, tak predošlý vzorec môžeme písať v tvare

$$\|\overline{u}\| = \sqrt{\overline{u}^2} \quad \text{alebo} \quad \|\overline{u}\|^2 = \overline{u}^2$$

Veta 1.11. Pre ľubovoľné dva vektory $\overline{u} = (u_1,\, u_2,\, u_3)$, $\overline{v} = (v_1,\, v_2,\, v_3)$ platí

$$\overline{u}.\overline{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$$

Dôkaz

a) Predpokladajme, že vektory $\overline{u}$, $\overline{v}$ sú lineárne nezávislé. Ich uhol označme φ a v priestore zvoľme body A, B, C (obr. 13) tak, že $\overline{u} = B - A$, $\overline{v} = C - A$. Potom A, B, C sú vrcholy trojuholníka a $\overline{v} - \overline{u} = C - B$, $|A,\, B| = \|\overline{u}\|$, $|A,\, C| = \|\overline{v}\|$, $|B,\, C| = \|\overline{v} - \overline{u}\|$. Podľa kosínusovej vety

$$\|\overline{v} - \overline{u}\|^2 = \|\overline{u}\|^2 + \|\overline{v}\|^2 - 2\|\overline{u}\|\|\overline{v}\| \cos\varphi$$

čiže

$$(v_1 - u_1)^2 + (v_2 - u_2)^2 + (v_3 - u_3)^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 - 2(\overline{u}.\overline{v})$$

Po jednoduchej úprave dostaneme tvrdenie vety.

b) Nech vektory $\overline{u}$, $\overline{v}$ sú lineárne závislé. Potom jeden z nich je násobkom druhého. Nech napr. $\overline{v} = \alpha\overline{u}$. Ak $\alpha = 0$, tak $\overline{u} = (0,\, 0,\, 0)$ a evidentne $\overline{u}.\overline{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = 0$. Ak $\alpha > 0$, tak uhol vektorov $\overline{u}$, $\overline{v}$ je $\varphi = 0$ a $|\alpha|\cos 0 = \alpha$. Ak $\alpha < 0$, tak uhol vektorov $\overline{u}$, $\overline{v}$ je $\varphi = \pi$ a $|\alpha|\cos\pi = (-\alpha)(-1) = \alpha$. V oboch prípadoch

$$\begin{aligned}\overline{u}.\overline{v} &= \|\overline{u}\|\|\alpha\overline{u}\|\cos\varphi = |\alpha|\cos\varphi\|\overline{u}\|^2 = \alpha(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2) = u_1(\alpha u_1) + u_2(\alpha u_2) + u_3(\alpha u_3) = \\ &= u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3\end{aligned}$$

□

Veta 1.12. Pre každé vektory $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{w}$ a každé reálne číslo α platí

(1) $\overline{u}.\overline{v} = \overline{v}.\overline{u}$
(2) $\overline{u}.(\overline{v} + \overline{w}) = \overline{u}.\overline{v} + \overline{u}.\overline{w}$
(3) $(\alpha\overline{u}).\overline{v} = \alpha(\overline{u}.\overline{v})$
(4) $\overline{u}^2 \geq 0$, pričom
$\overline{u}^2 = 0 \Leftrightarrow \overline{u} = \overline{0}$

Dôkaz

Všetky štyri vlastnosti sa ľahko dokážu prechodom k súradniciam, napr. vlastnosť (3) takto:

$$(\alpha\overline{u}).\overline{v} = (\alpha u_1, \alpha u_2, \alpha u_3).(v_1, v_2, v_3) = \alpha(u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3) = \alpha(\overline{u}.\overline{v})$$

□

Príklad 1.5. Pre vektory $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c} \in \mathbf{V}(\mathbf{E}_3)$ platí

$$\|\overline{a}\| = \|\overline{b}\| = \|\overline{c}\| = 1, \quad \overline{a} + \overline{b} + \overline{c} = \overline{0}$$

Aké uhly zvierajú tieto vektory?

Riešenie

Postupným skalárnym vynásobením rovnosti $\overline{a} + \overline{b} + \overline{c} = \overline{0}$ vektormi $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ dostaneme

$$\begin{aligned} \|\overline{a}\|^2 + \overline{a}.\overline{b} + \overline{a}.\overline{c} &= 0 \\ \overline{a}.\overline{b} + \|\overline{b}\|^2 + \overline{b}.\overline{c} &= 0 \\ \overline{a}.\overline{c} + \overline{b}.\overline{c} + \|\overline{c}\|^2 &= 0 \end{aligned}$$

po úprave

$$\begin{aligned} \overline{a}.\overline{b} + \overline{a}.\overline{c} &= -1 \\ \overline{a}.\overline{b} + \overline{b}.\overline{c} &= -1 \\ \overline{a}.\overline{c} + \overline{b}.\overline{c} &= -1 \end{aligned}$$

čo je sústava lineárnych rovníc s neznámymi $\overline{a}.\overline{b}$, $\overline{a}.\overline{c}$, $\overline{b}.\overline{c}$. Pomocou ERO upravíme rozšírenú maticu tejto sústavy na redukovaný stupňovitý tvar:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1, & 1, & 0 & -1 \\ 1, & 0, & 1 & -1 \\ 0, & 1, & 1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1, & 1, & 0 & -1 \\ 0, & -1, & 1 & 0 \\ 0, & 1, & 1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1, & 1, & 0 & -1 \\ 0, & -1, & 1 & 0 \\ 0, & 0, & 2 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1, & 0, & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0, & 1, & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0, & 0, & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

Z poslednej matice vyplýva

$$\overline{a}.\overline{b} = \overline{a}.\overline{c} = \overline{b}.\overline{c} = -\frac{1}{2}$$

Pre uhol φ vektorov $\overline{a}$, $\overline{b}$ potom platí

$$\cos\varphi = \frac{\overline{a}.\overline{b}}{\|\overline{a}\|\,\|\overline{b}\|} = -\frac{1}{2}$$

z čoho $\varphi = \frac{2}{3}\pi$. Analogicky vypočítame, že $\angle(\overline{a}, \overline{c}) = \angle(\overline{b}, \overline{c}) = \frac{2}{3}\pi$.

■

Príklad 1.6. Vypočítajme veľkosť vnútorného uhla trojuholníka ABC pri vrchole A, ak $A = (3, 3, 0)$, $B = (4, 1, 2)$, $C = (1, 1, 8)$.

Riešenie

Pre veľkosť α vnútorného uhla pri vrchole A zrejme platí $\alpha = \angle(B - A, C - A)$, preto

$$\cos\alpha = \frac{(B-A).(C-A)}{\|B-A\|\,\|C-A\|} = \frac{(1, -2, 2).(-2, -2, 8)}{\|(1, -2, 2)\|\,\|(-2, -2, 8)\|} = \frac{-2+4+16}{\sqrt{1+4+4}\sqrt{4+4+64}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

odkiaľ dostaneme $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

■

Definícia 1.12. Hovoríme, že vektory $\overline{u}$, $\overline{v}$ sú *navzájom* resp. *na seba kolmé* a označujeme $\overline{u} \perp \overline{v}$, ak $\overline{u}.\overline{v} = 0$.

Poznámka 1.7. Uvedomme si, že dva vektory sú na seba kolmé, ak niektorý z nich je nulový, alebo oba sú nenulové a ich uhol je $\frac{\pi}{2}$.

Príklad 1.7. Nájdime vektor $\overline{x}$ vyhovujúci podmienkam

(1) $\|\overline{x}\| = 6$,
(2) vektory $\overline{x}$, $\overline{a} = (1,\, 0,\, 2)$, $\overline{b} = (-2,\, 1,\, 0)$ sú komplanárne,
(3) vektor $\overline{x}$ je kolmý na vektor $\overline{c} = (1,\, -1,\, 1)$.

Riešenie

Z druhej podmienky vyplýva, že vektor $\overline{x}$ je lineárnou kombináciou vektorov $\overline{a}$, $\overline{b}$, teda

$$\overline{x} = \alpha\overline{a} + \beta\overline{b} = (\alpha - 2\beta,\, \beta,\, 2\alpha)$$

pre vhodné α, β. Tretia podmienka bude splnená práve vtedy, keď $\overline{x}.\overline{c} = 0$, teda

$$\alpha - 2\beta - \beta + 2\alpha = 0$$

Odtiaľ dostaneme $\alpha = \beta$ a potom

$$\overline{x} = (-\alpha,\, \alpha,\, 2\alpha) = \alpha(-1,\, 1,\, 2)$$

Z prvej vlastnosti vyplýva

$$6 = |\alpha|\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 2^2} = |\alpha|\sqrt{6}$$

odkiaľ $|\alpha| = \sqrt{6}$. Uvedeným podmienkam vyhovujú dva vektory

$$\overline{x}_1 = \sqrt{6}(-1,\, 1,\, 2), \quad \overline{x}_2 = -\sqrt{6}(-1,\, 1,\, 2)$$

■

Veta 1.13. Ku každým dvom vektorom $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{v} \neq \overline{0}$, existuje práve jeden vektor $\overline{u}_0$ kolineárny s $\overline{v}$ spĺňajúci podmienku $\overline{u} - \overline{u}_0 \perp \overline{v}$.

Dôkaz

Podľa predpokladu (obr. 14) $\overline{u}_0 = \alpha\overline{v}$ a $(\overline{u} - \overline{u}_0).\overline{v} = 0$, odkiaľ

$$(\overline{u} - \alpha\overline{v}).\overline{v} = 0$$
$$\overline{u}.\overline{v} - \alpha\overline{v}^{\,2} = 0$$

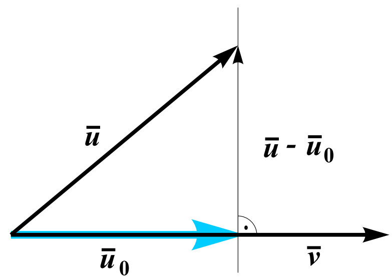
Keďže $\|\overline{v}\|^2 = \overline{v}^{\,2} \neq 0$, má táto rovnica jediné riešenie

$$\alpha = \frac{\overline{u}.\overline{v}}{\|\overline{v}\|^2}$$

Teda

$$\overline{u}_0 = \frac{\overline{u}.\overline{v}}{\|\overline{v}\|^2}\,\overline{v}$$

□



Obr. 14

Definícia 1.13. Vektor $\overline{u}_0$ definovaný v predchádzajúcej vete sa nazýva *ortogonálny priemet vektora* $\overline{u}$ *do vektora* $\overline{v}$.

Príklad 1.8. Vypočítajme veľkosť výšky na stranu c v trojuholníku ABC, ak $A = (2,\, 1,\, 3)$, $B = (-1,\, 2,\, 1)$, $C = (3,\, -1,\, 0)$.

Riešenie

Označme P pätu kolmice vedenej z bodu C na stranu c. Potom vektor $\overline{u}_0 = P - A$ je ortogonálnym priemetom vektora $\overline{u} = C - A$ do vektora $\overline{v} = B - A$ a teda

$$\overline{u}_0 = \frac{\overline{u}.\overline{v}}{\|\overline{v}\|^2}\,\overline{v} = \frac{(1,\, -2,\, -3).(-3,\, 1,\, -2)}{9+1+4}\,(-3,\, 1,\, -2) = \frac{1}{14}\,(-3,\, 1,\, -2)$$

Teraz môžeme určiť bod P a veľkosť výšky v_c:

$$P = A + \overline{u}_0 = (2,\, 1,\, 3) + \frac{1}{14}\,(-3,\, 1,\, -2) = \frac{1}{14}\,(25,\, 15,\, 40)$$

$$v_c = |P,\, C| = \|C - P\| = \|\frac{1}{14}\,(17,\, -29,\, 2)\| = \frac{1}{14}\sqrt{289 + 841 + 4} = \frac{1}{14}\sqrt{1134} = \frac{9\sqrt{14}}{14}$$

■

Definícia 1.14. Usporiadaná báza sa nazýva *ortogonálna*, ak každé jej dva vektory sú na seba kolmé. Ortogonálna báza, ktorej všetky vektory sú jednotkové (ich veľkosť je 1) sa nazýva *ortonormálna.*

Poznámka 1.8. Ak $J_1,\, J_2,\, J_3$ sú jednotkové body na súradnicových osiach $o_x,\, o_y,\, o_z$ a $\overline{e}_1 = J_1 - O = (1,\, 0,\, 0)$, $\overline{e}_2 = J_2 - O = (0,\, 1,\, 0)$, $\overline{e}_3 = J_3 - O = (0,\, 0,\, 1)$, tak usporiadaná báza $(\overline{e}_1,\, \overline{e}_2,\, \overline{e}_3)$ je zrejme ortonormálna.
Bodom O a usporiadanou bázou $(\overline{e}_1,\, \overline{e}_2,\, \overline{e}_3)$ je súradnicová sústava $(O,\, o_x,\, o_y,\, o_z)$ jednoznačne charakterizovaná, preto ju budeme označovať aj $(O,\, \overline{e}_1,\, \overline{e}_2,\, \overline{e}_3)$.
Všimnime si, že ľubovoľný vektor $\overline{u} = (u_1,\, u_2,\, u_3)$ môžeme vyjadriť v tvare $\overline{u} = u_1\overline{e}_1 + u_2\overline{e}_2 + u_3\overline{e}_3$.

Vektorový súčin.

Definícia 1.15. *Vektorovým súčinom* vektorov $\overline{u} = (u_1,\, u_2,\, u_3)$, $\overline{v} = (v_1,\, v_2,\, v_3)$ nazývame vektor

$$\overline{u} \times \overline{v} = \left(\begin{vmatrix} u_2, & u_3 \\ v_2, & v_3 \end{vmatrix},\, - \begin{vmatrix} u_1, & u_3 \\ v_1, & v_3 \end{vmatrix},\, \begin{vmatrix} u_1, & u_2 \\ v_1, & v_2 \end{vmatrix} \right)$$

Poznámka 1.9. Vektorový súčin vektorov $\overline{u},\, \overline{v}$ môžeme formálne vyjadriť v tvare

$$\overline{u} \times \overline{v} = \begin{vmatrix} \overline{e}_1, & \overline{e}_2, & \overline{e}_3 \\ u_1, & u_2, & u_3 \\ v_1, & v_2, & v_3 \end{vmatrix}$$

Ak totiž výraz na pravej strane považujeme za determinant, pričom vektory $\overline{e}_1,\, \overline{e}_2,\, \overline{e}_3$ dočasne považujeme za čísla, tak rozvojom tohto determinantu podľa podľa prvého riadku dostaneme

$$\begin{vmatrix} u_2, & u_3 \\ v_2, & v_3 \end{vmatrix}\overline{e}_1 - \begin{vmatrix} u_1, & u_3 \\ v_1, & v_3 \end{vmatrix}\overline{e}_2 + \begin{vmatrix} u_1, & u_2 \\ v_1, & v_2 \end{vmatrix}\overline{e}_3 = \left(\begin{vmatrix} u_2, & u_3 \\ v_2, & v_3 \end{vmatrix},\, - \begin{vmatrix} u_1, & u_3 \\ v_1, & v_3 \end{vmatrix},\, \begin{vmatrix} u_1, & u_2 \\ v_1, & v_2 \end{vmatrix} \right)$$

Príklad 1.9. Vypočítajme $\overline{u} \times \overline{v}$, ak $\overline{u} = (2,\, 0,\, -1)$, $\overline{v} = (1,\, 2,\, 3)$.

Riešenie

$$\overline{u} \times \overline{v} = \begin{vmatrix} \overline{e}_1, & \overline{e}_2, & \overline{e}_3 \\ 2, & 0, & -1 \\ 1, & 2, & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0, & -1 \\ 2, & 3 \end{vmatrix}\overline{e}_1 - \begin{vmatrix} 2, & -1 \\ 1, & 3 \end{vmatrix}\overline{e}_2 + \begin{vmatrix} 2, & 0 \\ 1, & 2 \end{vmatrix}\overline{e}_3 = (2,\, -7,\, 4)$$

■

Veta 1.14. Nech $\overline{u},\, \overline{v},\, \overline{w} \in \mathbf{V}(\mathbf{E}_3)$, $\alpha \in \mathbf{R}$, potom
(1) $\overline{u} \times \overline{v} = -\overline{v} \times \overline{u}$,
(2) $(\alpha\overline{u}) \times \overline{v} = \overline{u} \times (\alpha\overline{v}) = \alpha(\overline{u} \times \overline{v})$,
(3) $(\overline{u} + \overline{v}) \times \overline{w} = \overline{u} \times \overline{w} + \overline{v} \times \overline{w}$.

Dôkaz

Nech $\overline{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\overline{v} = (v_1, v_2, v_3)$, $\overline{w} = (w_1, w_2, w_3)$.

$$(1)\quad \overline{u}\times\overline{v} = \left(\begin{vmatrix} u_2, & u_3 \\ v_2, & v_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} u_1, & u_3 \\ v_1, & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1, & u_2 \\ v_1, & v_2 \end{vmatrix}\right) =$$

$$= \left(-\begin{vmatrix} v_2, & v_3 \\ u_2, & u_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} v_1, & v_3 \\ u_1, & u_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} v_1, & v_2 \\ u_1, & u_2 \end{vmatrix}\right) = -\overline{v}\times\overline{u}$$

$$(2)\quad (\alpha\overline{u})\times\overline{v} = \left(\begin{vmatrix} \alpha u_2, & \alpha u_3 \\ v_2, & v_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} \alpha u_1, & \alpha u_3 \\ v_1, & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \alpha u_1, & \alpha u_2 \\ v_1, & v_2 \end{vmatrix}\right) =$$

$$= \alpha\left(\begin{vmatrix} u_2, & u_3 \\ v_2, & v_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} u_1, & u_3 \\ v_1, & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1, & u_2 \\ v_1, & v_2 \end{vmatrix}\right) = \alpha(\overline{u}\times\overline{v})$$

$$\overline{u}\times(\alpha\overline{v}) = -\left[(\alpha\overline{v})\times\overline{u}\right] = -\alpha(\overline{v}\times\overline{u}) = \alpha(\overline{u}\times\overline{v})$$

$$(3)\quad (\overline{u}+\overline{v})\times\overline{w} = \begin{vmatrix} \overline{e}_1, & \overline{e}_2, & \overline{e}_3 \\ u_1+v_1, & u_2+v_2, & u_3+v_3 \\ w_1, & w_2, & w_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \overline{e}_1, & \overline{e}_2, & \overline{e}_3 \\ u_1, & u_2, & u_3 \\ w_1, & w_2, & w_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \overline{e}_1, & \overline{e}_2, & \overline{e}_3 \\ v_1, & v_2, & v_3 \\ w_1, & w_2, & w_3 \end{vmatrix} = \overline{u}\times\overline{w} + \overline{v}\times\overline{w}$$

□

Poznámka 1.10. Vektorový súčin nie je komutatívny a ani asociatívny. Z toho dôvodu výraz $\overline{u}\times\overline{v}\times\overline{w}$ nemá zmysel.

Veta 1.15. Vektory $\overline{u}$, $\overline{v}$ sú lineárne závislé (kolineárne) práve vtedy, keď $\overline{u}\times\overline{v} = \overline{0}$.

Dôkaz

Nech $\overline{u}, \overline{v}$ sú kolineárne vektory. To nastane práve vtedy, keď jeden z nich je násobkom druhého. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že $\overline{v} = \alpha\overline{u}$, kde $\alpha \in \mathbf{R}$. Potom

$$\overline{u}\times\overline{v} = \left(\begin{vmatrix} u_2, & u_3 \\ \alpha u_2, & \alpha u_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} u_1, & u_3 \\ \alpha u_1, & \alpha u_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1, & u_2 \\ \alpha u_1, & \alpha u_2 \end{vmatrix}\right) = (0,\, 0,\, 0) = \overline{0}$$

Predpokladajme teraz, že $\overline{u}\times\overline{v} = \overline{0}$. To platí práve vtedy, keď súradnice vektora $\overline{u}\times\overline{v}$ sú nulové, t.j.

$$\begin{aligned} u_2v_3 - u_3v_2 &= 0 \\ -u_1v_3 + u_3v_1 &= 0 \\ u_1v_2 - u_2v_1 &= 0 \end{aligned}$$

Chceme dokázať, že vektory $\overline{u}$, $\overline{v}$ sú lineárne závislé. Môžu nastať dva prípady:

1. $\overline{u} = \overline{v} = \overline{0}$. Potom sú vektory $\overline{u}$, $\overline{v}$ lineárne závislé.

2. Aspoň jeden z vektorov $\overline{u}$, $\overline{v}$ je nenulový. Potom aspoň jedna zo súradníc vektorov $\overline{u}$, $\overline{v}$ je rôzna od nuly. Nech napríklad $u_1 \neq 0$ (ďalší postup by bol analogický aj v prípade, že je rôzna od nuly iná súradnica). Z posledných dvoch vyššie uvedených rovníc vyplýva

$$v_3 = \frac{v_1}{u_1}u_3, \qquad v_2 = \frac{v_1}{u_1}u_2$$

Z toho a z evidentnej rovnosti

$$v_1 = \frac{v_1}{u_1}u_1$$

vyplýva

$$\overline{v} = \frac{v_1}{u_1}\overline{u}$$

čo znamená, že vektory $\overline{u}$, $\overline{v}$ sú lineárne závislé. □

Veta 1.16. Nech $\overline{u}$, $\overline{v}$ sú lineárne nezávislé vektory, potom

(1) $\overline{u} \times \overline{v} \perp \overline{u}$, $\overline{u} \times \overline{v} \perp \overline{v}$,
(2) $\|\overline{u} \times \overline{v}\| = \|\overline{u}\|\|\overline{v}\| \sin \angle(\overline{u}, \overline{v})$,
(3) $(\overline{u}, \overline{v}, \overline{u} \times \overline{v})$ je báza súhlasne orientovaná s bázou $(\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3)$.

Dôkaz

(1) Stačí dokázať, že $\overline{u}.(\overline{u} \times \overline{v}) = \overline{v}.(\overline{u} \times \overline{v}) = 0$. Počítajme

$$\overline{u}.(\overline{u} \times \overline{v}) = u_1 \begin{vmatrix} u_2, & u_3 \\ v_2, & v_3 \end{vmatrix} - u_2 \begin{vmatrix} u_1, & u_3 \\ v_1, & v_3 \end{vmatrix} + u_3 \begin{vmatrix} u_1, & u_2 \\ v_1, & v_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1, & u_2, & u_3 \\ u_1, & u_2, & u_3 \\ v_1, & v_2, & v_3 \end{vmatrix} = 0$$

Podobne sa ukáže, že $\overline{v}.(\overline{u} \times \overline{v}) = 0$.

(2) $\|\overline{u} \times \overline{v}\|^2 = (u_2v_3 - u_3v_2)^2 + (-u_1v_3 + u_3v_1)^2 + (u_1v_2 - u_2v_1)^2 =$

$$= (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) - (u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3)^2 = \|\overline{u}\|^2\|\overline{v}\|^2 - (\overline{u}.\overline{v})^2 =$$

$$= \|\overline{u}\|^2\|\overline{v}\|^2 - \|\overline{u}\|^2\|\overline{v}\|^2 \cos \angle(\overline{u}, \overline{v}) = \|\overline{u}\|^2\|\overline{v}\|^2 \sin^2 \angle(\overline{u}, \overline{v})$$

Odtiaľ a z faktu $\sin \angle(\overline{u}, \overline{v}) \geq 0$ vyplýva

$$\|\overline{u} \times \overline{v}\| = \|\overline{u}\|\|\overline{v}\| \sin \angle(\overline{u}, \overline{v}).$$

(3) Ak (w_1, w_2, w_3) sú súradnice vektorového súčinu $\overline{u} \times \overline{v}$, stačí dokázať, že determinant

$$\Delta = \begin{vmatrix} u_1, & u_2, & u_3 \\ v_1, & v_2, & v_3 \\ w_1, & w_2, & w_3 \end{vmatrix}$$

je kladný.

$$\Delta = w_1 \underbrace{\begin{vmatrix} u_2, & u_3 \\ v_2, & v_3 \end{vmatrix}}_{w_1} - w_2 \underbrace{\begin{vmatrix} u_1, & u_3 \\ v_1, & v_3 \end{vmatrix}}_{-w_2} + w_3 \underbrace{\begin{vmatrix} u_1, & u_2 \\ v_1, & v_2 \end{vmatrix}}_{w_3} = w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 > 0$$

□

Poznámka 1.11. Ak A je ľubovoľne zvolený bod v $\mathbf{E}_3$, $\overline{u}$, $\overline{v}$ sú lineárne nezávislé vektory, $B = A + \overline{u}$, $C = A + \overline{v}$, $D = A + (\overline{u} + \overline{v})$, tak body A, B, C sú vrcholy trojuholníka, ktorého plošný obsah je

$$P = \frac{1}{2}|A, B||A, C| \sin \alpha = \frac{1}{2}\|\overline{u}\|\|\overline{v}\| \sin \angle(\overline{u}, \overline{v}) = \frac{1}{2}\|\overline{u} \times \overline{v}\|$$

Z toho vyplýva, že veľkosť vektorového súčinu vektorov $\overline{u}$, $\overline{v}$ sa číselne rovná plošnému obsahu rovnobežníka $ABCD$.

Príklad 1.10. Vypočítajme $\left\|(\overline{a} + \overline{b}) \times (\overline{a} - \overline{b})\right\|$, ak $\|\overline{a}\| = 3$, $\left\|\overline{b}\right\| = 5$, $\angle(\overline{a}, \overline{b}) = \frac{\pi}{3}$.

Riešenie

$$(\overline{a} + \overline{b}) \times (\overline{a} - \overline{b}) = \overline{a} \times \overline{a} - \overline{a} \times \overline{b} + \overline{b} \times \overline{a} - \overline{b} \times \overline{b} = \overline{0} - \overline{a} \times \overline{b} - \overline{a} \times \overline{b} - \overline{0} = -2(\overline{a} \times \overline{b})$$

Potom

$$\left\|(\overline{a} + \overline{b}) \times (\overline{a} - \overline{b})\right\| = \left\|-2(\overline{a} \times \overline{b})\right\| = 2\left\|\overline{a} \times \overline{b}\right\| = 2\|\overline{a}\|\left\|\overline{b}\right\| \sin \angle(\overline{a}, \overline{b}) = 2.3.5.\frac{\sqrt{3}}{2} = 15\sqrt{3}$$

■

Príklad 1.11. Vypočítajme plošný obsah P trojuholníka ABC, ak $A = (1, -1, 2)$, $B = (2, 0, -2)$, $C = (3, -2, 0)$.

Riešenie

Nech $\overline{u} = B - A$, $\overline{v} = C - A$. Potom

$$\overline{u} \times \overline{v} = \begin{vmatrix} \overline{e}_1, & \overline{e}_2, & \overline{e}_3 \\ 1, & 1, & -4 \\ 2, & -1, & -2 \end{vmatrix} = (-6\overline{e}_1 - 6\overline{e}_2 - 3\overline{e}_3) = -3(2,\, 2,\, 1),$$

$$P = \tfrac{1}{2}\|\overline{u} \times \overline{v}\| = \tfrac{1}{2}3\sqrt{4+4+1} = \tfrac{9}{2}$$

■

Zmiešaný súčin.

Definícia 1.16. *Zmiešaným súčinom vektorov* $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w} \in \mathbf{V}(\mathbf{E}_3)$ nazývame reálne číslo, ktoré označujeme $[\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}]$ a definujeme takto:

$$[\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}] = \overline{u}.(\overline{v} \times \overline{w})$$

Poznámka 1.12. Názov zmiešaný súčin naznačuje, že sú v ňom „zmiešané“ dva rôzne súčiny, a to skalárny a vektorový. Zmiešaný súčin teda neprináša nič nového, je však užitočnou symbolickou skratkou a používa sa preto v rade vzorcov.

Veta 1.17. Pre každé tri vektory $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}$ platí rovnosť

$$[\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}] = \begin{vmatrix} u_1, & u_2, & u_3 \\ v_1, & v_2, & v_3 \\ w_1, & w_2, & w_3 \end{vmatrix}$$

Dôkaz

$$[\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}] = \overline{u}.(\overline{v} \times \overline{w}) = u_1 \begin{vmatrix} v_2, & v_3 \\ w_2, & w_3 \end{vmatrix} - u_2 \begin{vmatrix} v_1, & v_3 \\ w_1, & w_3 \end{vmatrix} + u_3 \begin{vmatrix} v_1, & v_2 \\ w_1, & w_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1, & u_2, & u_3 \\ v_1, & v_2, & v_3 \\ w_1, & w_2, & w_3 \end{vmatrix}$$

□

Veta 1.18. Vektory $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}$ sú lineárne závislé (komplanárne) práve vtedy, keď $[\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}] = 0$.

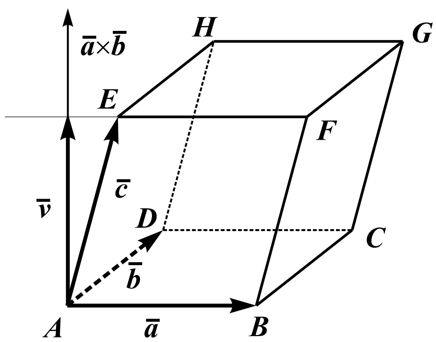
Dôkaz

Zmiešaný súčin vektorov $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}$ sa rovná determinantu matice zostavenej zo súradníc týchto vektorov. Ten sa rovná nule práve vtedy, keď keď sú vektory $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}$ lineárne závislé.

□

Veta 1.19. Nech V je objem rovnobežnostena $ABCDEFGH$. Potom (obr. 15)

$$V = [B - A,\, D - A,\, E - A]$$



Obr. 15

Dôkaz

Označme $\overline{a} = B - A$, $\overline{b} = D - A$, $\overline{c} = E - A$. Plošný obsah steny $ABCD$ je $P = \|\overline{a} \times \overline{b}\|$. Výška v rovnobežnostena je normou vektora $\overline{v}$, ktorý je ortogonálnym priemetom vektora $\overline{c}$ do vektora $\overline{a} \times \overline{b}$. Preto

$$V = Pv = \|\overline{a} \times \overline{b}\| \left\| \frac{\overline{c}.(\overline{a} \times \overline{b})}{\|\overline{a} \times \overline{b}\|^2} (\overline{a} \times \overline{b}) \right\| = \|\overline{a} \times \overline{b}\| \frac{|\overline{c}.(\overline{a} \times \overline{b})|}{\|\overline{a} \times \overline{b}\|^2} \|\overline{a} \times \overline{b}\| = \left| [\overline{c}, \overline{a}, \overline{b}] \right| = \left| [\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}] \right|$$

□

Príklad 1.12. Vypočítajme objem štvorstena $ABCD$, ak $A = (1, -1, 2)$, $B = (2, 0, -2)$, $C = (3, -2, 0)$, $D = (1, 1, 1)$.

Riešenie

Nech $\overline{a} = B - A$, $\overline{b} = C - A$, $\overline{c} = D - A$ Štvorsten (trojboký ihlan) $ABCD$ má plošný obsah podstavy (trojuholník ABC) $P = \frac{1}{2} \|\overline{a} \times \overline{b}\|$. Jeho výška v je ortogonálnym priemetom vektora $\overline{c}$ do vektora $\overline{a} \times \overline{b}$. Preto

$$V = \frac{1}{3} Pv = \frac{1}{6} \|\overline{a} \times \overline{b}\| \left\| \frac{\overline{c}.(\overline{a} \times \overline{b})}{\|\overline{a} \times \overline{b}\|^2} (\overline{a} \times \overline{b}) \right\| = \frac{1}{6} \left| [\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}] \right|$$

$$[\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}] = \begin{vmatrix} 1, & 1, & -4 \\ 2, & -1, & -2 \\ 0, & 2, & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1, & 1, & -4 \\ 0, & -3, & 6 \\ 0, & 2, & -1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1, & 1, & -4 \\ 0, & -1, & 2 \\ 0, & 0, & 3 \end{vmatrix} = -9$$

$$V = \tfrac{1}{6} \left| [\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}] \right| = \tfrac{1}{6} |-9| = \tfrac{3}{2}$$

■

Cvičenie 1.

(1) Nech T je ťažisko $\triangle\ ABC$, $\overline{t}_A = T - A$, $\overline{t}_B = T - B$, $\overline{t}_C = T - C$, Ukážte, že platí $\overline{t}_A + \overline{t}_B + \overline{t}_C = \overline{0}$.
[Nech S_A, S_B, S_C sú stredy strán BC, AC, AB; $\overline{a} = C - B$, $\overline{b} = A - C$, $\overline{c} = B - A$. Z vlastnosti ťažiska vyplýva $\overline{t}_A = \frac{2}{3}\left(\overline{c} + \frac{1}{2}\overline{a}\right)$, $\overline{t}_B = \frac{2}{3}\left(\overline{a} + \frac{1}{2}\overline{b}\right)$, $\overline{t}_C = \frac{2}{3}\left(\overline{b} + \frac{1}{2}\overline{c}\right)$. Potom $\overline{t}_A + \overline{t}_B + \overline{t}_C = \frac{2}{3}\left(\overline{c} + \frac{1}{2}\overline{a} + \overline{a} + \frac{1}{2}\overline{b} + \overline{b} + \frac{1}{2}\overline{c}\right) = \frac{2}{3}\frac{3}{2}(\overline{a} + \overline{b} + \overline{c}) = \overline{0}$]

(2) Daný je štvorsten ABCD. Určte
 (a) $(B - A) + (D - B) + (C - D)$, [$C - A$]
 (b) $(D - A) + (B - C) + (C - D)$, [$B - A$]
 (c) $(B - A) + (D - C) + (C - B) + (A - D)$. [$\overline{0}$]

(3) Daný je štvorsten $ABCD$. Nech K, L, M, P, Q, R sú stredy strán AB, BC, AC, AD, BD, CD v uvedenom poradí, $\overline{u} = B - A$, $\overline{v} = C - A$, $\overline{w} = D - A$. Vyjadrite vektory $\overline{a} = R - K$, $\overline{b} = Q - M$, $\overline{c} = L - P$, pomocou vektorov $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{w}$. $\left[\begin{array}{l} \overline{a} = \frac{1}{2}(-\overline{u} + \overline{v} + \overline{w}) \\ \overline{b} = \frac{1}{2}(\overline{u} - \overline{v} + \overline{w}) \\ \overline{c} = \frac{1}{2}(\overline{u} + \overline{v} - \overline{w}) \end{array}\right]$

(4) Vypočítajte $(\overline{a} - \overline{b})^2$, $(2\overline{a} - 3\overline{b})(3\overline{a} + \overline{b})$, ak $\|\overline{a}\| = 3$, $\|\overline{b}\| = 4$, $\angle(\overline{a}, \overline{b}) = \frac{\pi}{4}$.
[$25 - 12\sqrt{2}$, $6 - 42\sqrt{2}$]

(5) Vypočítajte $\|\overline{a} + \overline{b}\|$, $\|\overline{a} - \overline{b}\|$, ak $\|\overline{a}\| = 5$, $\|\overline{b}\| = 4$, $\angle(\overline{a}, \overline{b}) = \frac{2}{3}\pi$. [$\sqrt{21}$, $\sqrt{61}$]

(6) Pre vektory $\overline{a} = (2, -3, 4)$, $\overline{b} = (-1, 5, 6)$ vypočítajte $\overline{a}.\overline{b}$, $\sqrt{\overline{a}^2} \cos\angle(\overline{a}, \overline{b})$. $\left[7,\ \frac{7}{\sqrt{62}}\right]$

(7) Aký uhol zvierajú vektory $\overline{a}$, $\overline{b}$, ak vektor $\overline{a} + 3\overline{b}$ je kolmý na vektor $7\overline{a} - 5\overline{b}$ a vektor $\overline{a} - 4\overline{b}$ je kolmý na vektor $7\overline{a} - 2\overline{b}$? $\left[\frac{\pi}{3}\right]$

(8) Vektor $\overline{x}$ je kolmý na vektory $\overline{a} = (2, 3, -1)$, $\overline{b} = (1, -1, 3)$. Nájdite jeho súradnice, ak
 (a) s vektorom $\overline{e}_1 = (1, 0, 0)$ zviera tupý uhol a $\|\overline{x}\| = \sqrt{138}$, [$(-8, 7, 5)$]
 (b) $\overline{x}.\overline{c} = 50$, kde $\overline{c} = (2, -3, 4)$. $\left[\frac{50}{17}(8, -7, -5)\right]$

(9) Nech A, B, C, D sú ľubovoľné body ležiace v jednej rovine. Vypočítajte $(C - B).(D - A) + (A - C).(D - B) + (B - A).(D - C)$ [0]

(10) Vypočítajte pravouhlý priemet vektora $\overline{u} = B - A$ do vektora $\overline{v} = D - C$, ak $A = (1, -2, 4)$, $B = (-3, -1, 7)$, $C = (4, 2, -3)$, $D = (1, -2, 5)$. $\left[\frac{32}{89}(-3, -4, 8)\right]$

(11) Vypočítajte $\|\overline{a} \times \overline{b}\|$, ak $\|\overline{a}\| = 5$, $\|\overline{b}\| = 8$, $\overline{a}.\overline{b} = 24$. [32]

(12) Vypočítajte $\|(3\overline{u} + \overline{v}) \times (\overline{u} - 3\overline{v})\|$, ak $\|\overline{u}\| = 3$, $\|\overline{v}\| = 5$, $\angle(\overline{u}, \overline{v}) = \frac{\pi}{6}$. [75]

(13) Vypočítajte plošný obsah $\triangle ABC$, ak $A = (3, 2, -1)$, $B = (4, 4, -1)$, $C = (3, 2, 2)$ $\left[\frac{3}{2}\sqrt{5}\right]$

(14) Vypočítajte $[\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}]$ a v prípade, že $(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c})$ je báza, určte, či je ľavotočivá alebo pravotočivá (súradnice vektorov $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ sú v pravotočivej báze).
   (a) $\overline{a} = (13, 12, 11)$, $\overline{b} = (24, 23, 22)$, $\overline{c} = (35, 34, 33)$, [0]
   (b) $\overline{a} = (1, 3, 5)$, $\overline{b} = (8, 9, 7)$, $\overline{c} = (2, 4, 6)$, [-6, ľavotočivá]

(15) Vypočítajte objem štvorstena $ABCD$, ak $A = (1, 0, 0)$, $B = (1, 1, 0)$, $C = (2, 1, 0)$, $D = (1, 2, 3)$. $\left[\frac{1}{2}\right]$

(16) Vypočítajte objem a výšku štorbokého ihlana ABCDV, ak $A = (2, -1, 2)$, $B = (0, 0, 5)$, $C = (-1, 0, 5)$, $D = (4, -3, -4)$, $V = (1, 2, 1)$. [výška: $\sqrt{10}$, objem: $\frac{25}{3}$]

1.4. **Lineárne útvary v $\mathbf{E}_3$.**

Predpokladáme, že v $\mathbf{E}_3$ je zvolená karteziánska súradnicová sústava $(O, \overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3)$ a súradnice všetkých bodov a vektorov sa vzťahujú k tejto súradnicovej sústave.

Priamka.

Definícia 1.17. *Smerovým vektorom priamky p* nazývame každý nenulový vektor, ktorý je možné umiestniť na priamku p.

Veta 1.20. Nech p je priamka určená dvomi rôznymi bodmi A, B; $\overline{u} = B - A$. Potom

$$X \in p \ \text{ práve vtedy, keď existuje } t \in \mathbf{R}, \text{ že } \ X = A + t\overline{u}$$

Dôkaz

Bod X leží na priamke p práve vtedy, keď sú vektory $\overline{u}$, $X - A$ kolineárne. To nastane, vzhľadom k tomu, že vektor $\overline{u}$ je nenulový, práve vtedy, keď vektor $X - A$ je násobkom vektora $\overline{u}$, t.j. existuje $t \in \mathbf{R}$, že $X - A = t\overline{u}$, čiže $X = A + t\overline{u}$.

□

Rovnica

$$X = A + t\overline{u}, \ t \in \mathbf{R}$$

sa nazýva *vektorová rovnica priamky p*.
Ak ju rozpíšeme do súradníc, pričom $X = (x, y, z)$, dostaneme *parametrické rovnice priamky p*:

$$\begin{aligned} x &= a_1 + tu_1 \\ y &= a_2 + tu_2 \\ z &= a_3 + tu_3, \ t \in \mathbf{R} \end{aligned}$$

V prípade, že $u_1u_2u_3 \neq 0$, môžeme z parametrických rovníc eliminovať parameter t a dostaneme *kanonické rovnice priamky p*:

$$\frac{x - a_1}{u_1} = \frac{y - a_2}{u_2} = \frac{z - a_3}{u_3}$$

Poznámka 1.13. To, že priamka p je určená bodmi A, B resp. bodom A a smerovým vektorom $\overline{u}$, budeme zapisovať takto: $p \equiv AB$ resp. $p \equiv A\overline{u}$.

Príklad 1.13. Napíšme parametrické a kanonické rovnice priamky $p \equiv AB$, ak $A = (1, 2, -3)$, $B = (-1, 1, 2)$ a zistime, či na priamke p ležia body $C = (3, 3, -8)$, $D = (-1, 1, 1)$.

Riešenie

Vektor $\overline{u} = B - A = (-2, -1, 5)$ je smerovým vektorom priamky p. Potom

$$\begin{aligned} x &= 1 - 2t \\ y &= 2 - t \\ z &= -3 + 5t, \ t \in \mathbf{R} \end{aligned}$$

sú parametrické rovnice a

$$\frac{x-1}{-2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+3}{5}$$

kanonické rovnice priamky p.

Dosadením súradníc bodu C do parametrických rovníc priamky p dostaneme:

$$\begin{aligned} 3 &= 1-2t \quad \Rightarrow t=-1\\ 3 &= 2-t \quad \Rightarrow t=-1\\ -8 &= -3+5t \Rightarrow t=-1 \end{aligned}$$

Zistili sme, že existuje t, pre ktoré $C = A + t\overline{u}$, teda $C \in p$.

Ak do parametrických rovníc dosadíme bod D, dostaneme:

$$\begin{aligned} -1 &= 1-2t \quad \Rightarrow t=1\\ 1 &= 2-t \quad \Rightarrow t=1\\ 1 &= -3+5t \Rightarrow t=\tfrac{4}{5} \end{aligned}$$

Neexistuje t, pre ktoré by platilo $D = A + t\overline{u}$, preto $D \notin p$.

■

Rovina.

Definícia 1.18. Každý nenulový vektor, ktorý má umiestnenie v rovine ϱ, sa nazýva *smerový vektor roviny* ϱ. Nenulový vektor, ktorý je kolmý na všetky smerové vektory roviny ϱ sa nazýva *normálový vektor roviny* ϱ.

Veta 1.21. Nech A, B, C sú body roviny ϱ neležiace na jednej priamke, $\overline{u} = B - A$, $\overline{v} = C - A$, $\overline{n}$ je normálový vektor roviny σ. Potom ϱ je množina bodov X, pre ktoré platí

$$X = A + s\overline{u} + t\overline{v},\ \ s,t \in \mathbf{R}$$

resp.

$$[X-A,\, \overline{u},\, \overline{v}] = 0$$

resp.

$$(X-A).\overline{n} = 0$$

Dôkaz

Bod X leží v rovine ϱ práve vtedy, keď vektory $\overline{u}$, $\overline{v}$, $X - A$ sú komplanárne, t.j. platí $[X - A, \overline{u}, \overline{v}] = 0$.

Vektory $\overline{u}$, $\overline{v}$ sú lineárne nezávislé. V takom prípade vektory $\overline{u}$, $\overline{v}$, $X - A$ sú komplanárne práve vtedy, keď vektor $X - A$ je lineárnou kombináciou vektorov $\overline{u}$, $\overline{v}$, čiže $X - A = s\overline{u} + t\overline{v}$, odkiaľ $X = A + s\overline{u} + t\overline{v}$.

Normálový vektor $\overline{n}$ je kolmý na všetky vektory, ktoré sa dajú umiestniť do roviny ϱ. Teda bod X leží v rovine ϱ práve vtedy, keď $\overline{n} \perp X - A$, t.j. $(X - A).\overline{n} = 0$.

□

Rovnica

$$X = A + s\overline{u} + t\overline{v},\ \ s,t \in \mathbf{R}$$

sa nazýva *vektorová rovnica roviny* ϱ. Ak ju rozpíšeme po súradniciach, dostaneme *parametrické rovnice*:

$$\begin{aligned} x &= a_1 + su_1 + tv_1\\ y &= a_2 + su_2 + tv_2\\ z &= a_3 + su_3 + tv_3,\ \ s,t \in \mathbf{R} \end{aligned}$$

Úpravou rovnice $(X - A).\overline{n} = 0$, pričom $\overline{n} = (a, b, c)$, dostaneme

$$\begin{aligned} (x-a_1,\, y-a_2, z-a_3).(a,\, b,\, c) &= 0\\ ax+by+cz+(\underbrace{-aa_1-ba_2-ca_3}_{d}) &= 0\\ ax+by+cz+d &= 0 \end{aligned}$$

Posledná rovnica sa nazýva *všeobecná rovnica roviny* ϱ.

Poznámka 1.14. To, že rovina ϱ je daná a) bodmi A, B, C, b) bodom A a lineárne nezávislými smerovými vektormi $\overline{u}, \overline{v}$, c) bodom A a normálovým vektorom $\overline{n}$, budeme zapisovať a) $\varrho \equiv ABC$, b) $\varrho \equiv A\overline{u}\,\overline{v}$, c) $\varrho \equiv \overline{n}A$.

Príklad 1.14. Napíšme parametrické rovnice a všeobecnú rovnicu roviny ϱ, v ktorej leží bod $A = (2,\, -1,\, 1)$ a priamka $p:\ (x,\, y,\, z) = (-3,\, 1,\, 2) + t(1,\, 1,\, -2)$.

Riešenie

Vektor $\overline{u} = (1,\, 1,\, -2)$ je smerovým vektorom priamky p a teda aj roviny ϱ. Bod $B = (-3,\, 1,\, 2)$ priamky p leží aj v rovine ϱ a preto druhým smerovým vektorom roviny ϱ je $\overline{v} = B - A = (-5,\, 2,\, 1)$. Teraz už môžeme napísať parametrické rovnice roviny ϱ:

$$\begin{aligned} x &= 2 + s - 5t \\ y &= -1 + s + 2t \\ z &= 1 - 2s + t, \qquad s, t \in \mathbf{R} \end{aligned}$$

Všeobecnú rovnicu získame zo vzťahu $[X - A,\, \overline{u},\, \overline{v}] = 0$.

$$\begin{vmatrix} x-2, & y+1, & z-1 \\ 1, & 1, & -2 \\ -5, & 2, & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} 5(x-2) + 9(y+1) + 7(z-1) &= 0 \\ 5x + 9y + 7z - 8 &= 0 \end{aligned}$$

■

Podľa predchádzajúcej vety, každá rovina má všeobecnú rovnicu. Otázka je, či každá rovnica $ax + by + cz + d = 0$ je všeobecnou rovnicou niektorej roviny. Odpoveď na to dáva táto veta.

Veta 1.22. Množina všetkých bodov $X \in \mathbf{E}_3$, ktorých súradnice vyhovujú rovnici $ax + by + cz + d = 0$, pričom $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$, je rovina $\varrho \equiv \overline{n}A$, kde $\overline{n} = (a,\, b,\, c)$, $A = O - \frac{d}{\|\overline{n}\|^2}\,\overline{n}$.

Dôkaz

Rovina $\varrho \equiv \overline{n}A$ je určená rovnicou $(X-A).\overline{n} = 0$. Stačí dokázať, že $(X-A).\overline{n} = ax+by+cz+d$, kde $X = (x,\, y,\, z)$. Počítajme:

$$\begin{aligned} (X-A).\overline{n} &= \Big((X-O) + \tfrac{d}{\|\overline{n}\|^2}\,\overline{n}\Big).\overline{n} = (X-O).\overline{n} + d = (x,\, y,\, z).(a,\, b,\, c) + d = \\ &= ax + by + cz + d \end{aligned}$$

□

Vzájomná poloha priamok a rovín.

Veta 1.23. Priamky $p \equiv A\overline{u}$, $q \equiv B\overline{v}$ sú

a) mimobežné práve vtedy, keď $[B - A,\, \overline{u},\, \overline{v}] \neq 0$,
b) rôznobežné práve vtedy, keď $[B - A,\, \overline{u},\, \overline{v}] = 0$, $\overline{u} \times \overline{v} \neq \overline{0}$,
c) rovnobežné a rôzne práve vtedy, keď $\overline{u} \times \overline{v} = \overline{0}$, $(B - A) \times \overline{u} \neq \overline{0}$,
d) rovnobežné a totožné práve vtedy, keď $\overline{u} \times \overline{v} = \overline{0}$, $(B - A) \times \overline{u} = \overline{0}$.

Dôkaz

Hľadajme spoločné body priamok p, q, ktorých parametrické rovnice sú

$$p: \begin{cases} x = a_1 + tu_1 \\ y = a_2 + tu_2 \\ z = a_3 + tu_3 \end{cases} \qquad q: \begin{cases} x = b_1 + sv_1 \\ y = b_2 + sv_2 \\ z = b_3 + sv_3 \end{cases}$$

Spoločné body odpovedajú tým hodnotám parametrov t, s, pre ktoré platí

$$\begin{aligned} a_1 + tu_1 &= b_1 + sv_1 \\ a_2 + tu_2 &= b_2 + sv_2 \\ a_2 + tu_2 &= b_2 + sv_2 \end{aligned}$$

Po jednoduchej úprave dostaneme pre neznáme hodnoty t, s sústavu lineárnych rovníc:

$$\begin{aligned} tu_1 - sv_1 &= b_1 - a_1 \\ tu_2 - sv_2 &= b_2 - a_2 \\ tu_3 - sv_3 &= b_3 - a_3 \end{aligned}$$

Označme h hodnosť matice tejto sústavy a h' hodnosť rozšírenej matice tejto sústavy. Pre tieto hodnosti nastane práve jedna z možností:

a) $h = 2$, $h' = 3$. To nastáva práve vtedy, keď stĺpce rozšírenej matice sústavy, teda vektory $\overline{u}$, $\overline{v}$, $B - A$, sú lineárne nezávislé, t.j. $[B - A, \overline{u}, \overline{v}] \neq 0$. V tomto prípade sústava nemá riešenie, t.j. $p \cap q = \emptyset$. Keďže vektory $\overline{u}$, $\overline{v}$ nie sú kolineárne, priamky nemôžu byť rovnobežné, sú teda mimobežné.

b) $h = h' = 2$. To platí práve vtedy, keď vektory $\overline{u}$, $\overline{v}$ sú lineárne nezávislé a vektory $\overline{u}$, $\overline{v}$, $B - A$ sú lineárne závislé, t.j. $\overline{u} \times \overline{v} \neq \overline{0}$, $[B - A, \overline{u}, \overline{v}] = 0$. V tomto prípade má sústava práve jedno riešenie. Priamky p, q majú spoločný jediný bod, sú teda rôznobežné.

c) $h = 1$, $h' = 2$. To platí práve vtedy, keď vektory $\overline{u}, \overline{v}$ sú lineárne závislé a vektory $\overline{u}, B - A$ sú linárne nezávislé, t.j. $\overline{u} \times \overline{v} = \overline{0}$, $(B - A) \times \overline{u} \neq \overline{0}$. V tomto prípade sústava nemá riešenie, teda $p \cap q = \emptyset$, a keďže smerové vektory priamok p, q sú kolineárne, tak tieto priamky sú rovnobežné a rôzne.

d) $h = h' = 1$. To nastane práve vtedy, keď vektory $\overline{u}$, $\overline{v}$ a tiež $\overline{u}$, $B - A$ sú lineárne závislé, t.j. $\overline{u} \times \overline{v} = \overline{0}$, $(B - A) \times \overline{u} = \overline{0}$. V tomto prípade sústava má riešenie. Jednu neznámu, buď t alebo s, môžeme voliť ľubovoľne, a teda priamky p, q majú všetky svoje body spoločné, čiže $p = q$.

□

Príklad 1.15. Zistime vzájomnú polohu priamok $p \equiv A\overline{u}$, $q \equiv B\overline{v}$, keď

a) $A = (0, 0, 1)$, $\overline{u} = (2, 1, 0)$, $B = (0, 0, 3)$, $\overline{v} = (1, 1, 1)$
b) $A = (7, 5, 3)$, $\overline{u} = (3, 2, 1)$, $B = (0, -1, -2)$, $\overline{v} = (1, 2, 3)$

Riešenie

a) Keďže $[B - A, \overline{u}, \overline{v}] = \begin{vmatrix} 0, & 0, & 2 \\ 2, & 1, & 0 \\ 1, & 1, & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, sú priamky p, q mimobežné.

b) Vektory $\overline{u}$, $\overline{v}$ sú lineárne nezávislé. Priamky p, q sú buď rôznobežné alebo mimobežné. Ktorá z týchto možností nastane, závisí od toho, či majú spoločné body alebo nie. Z parametrických rovníc

$$p : \begin{cases} x = 7 + 3t \\ y = 5 + 2t \\ z = 3 + t \end{cases} \qquad q : \begin{cases} x = s \\ y = -1 + 2s \\ z = -2 + 3s \end{cases}$$

dostávame, že hodnoty parametrov, ktorým odpovedajú spoločné body priamok, sú riešením sústavy

$$\begin{aligned} 3t - 2s &= -7 \\ 2t - 2s &= -6 \\ t - 3s &= -5 \end{aligned}$$

Táto sústava má práve jedno riešenie $t = -2$, $s = 1$. Priamky p, q sú teda rôznobežné. Dosadením hodnoty $t = -2$ do parametrických rovníc priamky p, resp. hodnoty $s = 1$ do parametrických rovníc priamky q dostaneme spoločný bod oboch piamok: $Q = (1, 1, 1)$.

■

Veta 1.24. Priamka $p \equiv A\overline{u}$ a rovina $\varrho \equiv \overline{n}B$ sú

a) rôznobežné práve vtedy, keď $\overline{u}.\overline{n} \neq 0$,
b) rovnobežné a $p \cap \varrho = \emptyset$ práve vtedy, keď $\overline{u}.\overline{n} = 0$, $(A - B).\overline{n} \neq 0$,
c) rovnobežné a $p \subset \varrho$ práve vtedy, keď $\overline{u}.\overline{n} = 0$, $(A - B).\overline{n} = 0$

Dôkaz

Priamka p a rovina ϱ sú určené rovnicami

$$p : X = A + t\overline{u},\ t \in \mathbf{R} \qquad\qquad \varrho : (X - B).\overline{n} = 0$$

Hľadajme ich spoločné body, t.j. riešme sústavu rovníc

$$\begin{aligned} X &= A + t\overline{u} \\ (X - B).\overline{n} &= 0 \end{aligned}$$

Dosaďme vyjadrenie bodu X z prvej rovnice do druhej a po úprave dostaneme

$$-t(\overline{u}.\overline{n}) = (A - B).\overline{n}$$

Táto rovnica v prípade

a) $\overline{u}.\overline{n} \neq 0$, má jediné riešenie. Teda priamka p a rovina ϱ majú spoločný práve jeden bod a to $Q = A - \frac{(A-B).\overline{n}}{\overline{u}.\overline{n}}\,\overline{u}$.

b) $\overline{u}.\overline{n} = 0$ a $(A-B).\overline{n} \neq 0$, nemá riešenie. To znamená, že $p \cap \varrho = \emptyset$. Z kolmosti vektorov $\overline{u}$ a $\overline{n}$ vyplýva, že $\overline{u}$ je smerovým vektorom roviny ϱ a teda priamka p rovina ϱ sú rovnobežné.

c) $\overline{u}.\overline{n} = 0$ a $(A - B).\overline{n} = 0$, je splnená pre každé $t \in \mathbf{R}$ a preto $p \subset \varrho$.

□

Príklad 1.16. Zistime vzájomnú polohu priamky $p \equiv A\overline{u}$ a roviny $\varrho \equiv B\overline{v}\,\overline{w}$, keď $A = (1,\ 3,\ 2)$, $\overline{u} = (1,\ -1,\ -3)$, $B = (-1,\ 1,\ 2)$, $\overline{v} = (1,\ -2,\ 0)$, $\overline{w} = (0,\ 2,\ -3)$.

Riešenie

Úlohu môžeme riešiť pomocou vektorových rovníc priamky p a roviny ϱ

$$p : X = A + t\overline{u} \qquad\qquad \varrho : Y = B + r\overline{v} + s\overline{w}$$

Hľadajme spoločné body priamky p a roviny ϱ, t.j. také hodnoty parametrov t, r, s, ktoré po dosadení do rovníc priamky p a roviny ϱ určia ten istý bod $X = Y$. Porovnaním pravých strán rovníc priamky a roviny dostaneme pre t, r, s vektorovú rovnicu

$$t\overline{u} - r\overline{v} - s\overline{w} = B - A$$

ktorá rozpísaná do súradníc je sústavou troch lineárnych rovníc o troch neznámych t, r, s

$$\begin{array}{rcrcrcr} t & - & r & & & = & -2 \\ -t & + & 2r & - & 2s & = & -2 \\ -3t & & & + & 3s & = & 0 \end{array}$$

Táto sústava má jediné riešenie $(t,\ r,\ s) = (6,\ 8,\ 6)$, čomu odpovedá jediný spoločný bod priamky p a roviny ϱ, a to bod $Q = (7,\ -3,\ -16)$. Priamka p je s rovinou ϱ rôznobežná.

■

Veta 1.25. Roviny $\gamma \equiv \overline{c}A$, $\delta \equiv \overline{d}B$ sú

a) rôznobežné práve vtedy, keď $\overline{c} \times \overline{d} \neq \overline{0}$,

b) rovnobežné a $\gamma \cap \delta = \emptyset$ práve vtedy, keď $\overline{c} \times \overline{d} = \overline{0}$, $(B - A).\overline{c} \neq 0$,

c) rovnobežné a $\gamma = \delta$ práve vtedy, keď $\overline{c} \times \overline{d} = \overline{0}$, $(B - A).\overline{c} = 0$.

Dôkaz

Všeobecné rovnice rovín γ, δ sú

$$\begin{aligned} \gamma &: c_1x + c_2y + c_3z + c_0 = 0 \\ \delta &: d_1x + d_2y + d_3z + d_0 = 0 \end{aligned}$$

kde $\overline{c} = (c_1,\ c_2,\ c_3)$, $\overline{d} = (d_1,\ d_2,\ d_3)$. Hľadajme spoločné body rovín γ, δ, t.j. riešme sústavu tvorenú všeobecnými rovnicami rovín γ, δ. Ak h resp. h' je hodnosť matice resp. rozšírenej matice tejto sústavy, tak môžu nastať práve tri prípady:

a) $h = h' = 2$. To platí práve vtedy, keď sú riadky matice sústavy a teda vektory $\overline{c}$, $\overline{d}$ lineárne nezávislé, t.j. $\overline{c} \times \overline{d} \neq \overline{0}$. Sústava rovníc má nekonečne veľa riešení, pričom jednu z neznámych x, y, z je možné zvoliť ľubovoľne. Povedzme, že je to x. V tom prípade $x = t$, $t \in \mathbf{R}$ a z rovníc sústavy je možné vyjadriť y, z v tvare $y = q_2 + tu_2$, $z = q_3 + tu_3$. Pre spoločné body rovín teda platí

$$(x,\, y,\, z) = (0,\, q_2,\, q_3) + t(1, u_2,\, u_3), \quad t \in \mathbf{R}$$

čo je vektorová rovnica priamky. Prienikom rovín je priamka, čiže roviny sú rôznobežné.

b) $h = 1$, $h' = 2$. Sústava rovníc nemá riešenie a teda $\gamma \cap \delta = \emptyset$. Bod B neleži v rovine γ, preto $(B - A).\overline{c} \neq 0$. Keďže $h = 1$, sú vektory $\overline{c}$, $\overline{d}$ lineárne závislé a preto $\overline{c} \times \overline{d} = \overline{0}$. Normálový vektor roviny γ je zároveň normálovým vektorom roviny δ a naopak. Roviny sú teda rovnobežné.

c) $h = h' = 1$. Z toho istého dôvodu ako v prípade b) aj teraz platí $\overline{c} \times \overline{d} = \overline{0}$, roviny γ, δ sú rovnobežné. V tomto prípade má však sústava rovníc riešenie, ktoré je zhodné s riešením každej z rovníc tejto sústavy. Preto platí $\gamma = \delta$.

$\square$

Poznámka 1.15. V prípade, keď sú roviny γ, δ rôznobežné, je dvojicou ich všeobecných rovníc určená priamka $p = \gamma \cap \delta$, čo zapisujeme $p : \begin{cases} c_1x + c_2y + c_3z + c_0 = 0 \\ d_1x + d_2y + d_3z + d_0 = 0 \end{cases}$.

Príklad 1.17. Zistime vzájomnú polohu rovín

(1) $\alpha : x - y = 0$
$\beta : y - z = 0$

(2) $\alpha : -2x - 5y + z + 6 = 0$
$\beta : X = (0,\, 2,\, -2) + s(-1,\, 1,\, 3) + t(-3,\, 1,\, -1)$

(3) $\alpha : X = (1,\, 1,\, 1) + q(2,\, 0,\, 4) + r(-6,\, 3,\, 3)$
$\beta : X = (5,\, 1,\, 9) + s(1,\, -1,\, -3) + t(3,\, -1,\, 1)$

Riešenie

Hľadajme spoločné body rovín α, β, t.j. riešme príslušné sústavy rovníc.

(1)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1, & -1, & 0 & 0 \\ 0, & 1, & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1, & 0, & -1 & 0 \\ 0, & 1, & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Vidíme, že sústava rovníc má riešenie, neznámu z volíme ľubovoľne a zvyšné neznáme vyjadríme pomocou nej a dostaneme

$$\begin{aligned} x &= t \\ y &= t \\ z &= t, \quad t \in \mathbf{R} \end{aligned}$$

čo sú parametrické rovnice priamky. Roviny α, β sú preto rôznobežné.

(2)

$$\begin{aligned} -2(1 + 2q - 6r) - 5(1 + 3r) + (1 + 4q + 3r) &= 0 \\ 0q + 0r - 6 &= 0 \end{aligned}$$

Rovnica nemá riešenie, preto prienikom rovín je prázdna množina. Roviny α, β sú rovnobežné.

(3)

$$\begin{aligned} 1 + 2q - 6r &= 5 + s + 3t \\ 1 + 3r &= 1 - s - t \\ 1 + 4q + 3r &= 9 - 3s + t \end{aligned}$$

po úprave

$$\begin{aligned} 2q - 6r - s - 3t &= 4 \\ 3r + s + t &= 0 \\ 4q + 3r + 3s - t &= 8 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2, & -6, & -1, & -3 & 4 \\ 0, & 3, & 1, & 1 & 0 \\ 4, & 3, & 3, & -1 & 8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2, & -6, & -1, & -1 & 4 \\ 0, & 3, & 1, & 1 & 0 \\ 0, & 15, & 5, & 5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2, & -6, & -1, & -1 & 4 \\ 0, & 3, & 1, & 1 & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Sústava má nekonečne veľa riešení, dve neznáme s, t môžeme voliť ľubovoľne. To znamená, že množina všetkých spoločných bodov obidvoch rovín je určená tou istou vektorovou rovnicou ako rovina β. Roviny α, β sú teda totožné.

■

Príklad 1.18. Určme všeobecnú rovnicu roviny α, v ktorej leží bod $A = (1,\, 1,\, -1)$ a priamka $p : \left\{ \begin{array}{l} 2x - y + z - 3 = 0 \\ x + y - 2z + 1 = 0 \end{array} \right.$.

Riešenie

Keďže priamka p leží v rovine α, musí byť každé riešenie sústavy dvoch rovníc určujúcich priamku p aj riešením všeobecnej rovnice roviny α. To je možné práve vtedy, keď rovnica roviny α je lineárnou kombináciou rovníc určujúcich priamku p, čiže

$$\alpha : t(2x - y + z - 3) + s(x + y - 2z + 1) = 0$$

Z podmienky $A \in \alpha$ určíme t a s. Dosadením súradníc bodu A do rovnice dostaneme $-3t+5s = 0$. Zvoľme jedno nenulové riešnie tejto rovnice, napríklad $t = 5,\ s = 3$. Potom

$$\alpha : 13x - 2y - z - 12 = 0$$

Voľbou iných nenulových hodnôt t, s vyhovujúcich vzťahu $-3t + 5s = 0$, by sme dostali násobok pred chvíľou nájdenej rovnice roviny α.

■

Uhol priamok a rovín.

Veta 1.26. Nech $\varphi \in \langle 0,\, \frac{\pi}{2} \rangle$ je uhol priamok $p \equiv P\overline{u}$, $q \equiv Q\overline{v}$, potom

$$\cos\varphi = \frac{|\overline{u}.\overline{v}|}{\|\overline{u}\|\,\|\overline{v}\|}$$

Dôkaz

Uhol smerových vektorov $\overline{u}$, $\overline{v}$ priamok p, q je φ alebo $\pi - \varphi$ a keďže $\cos(\pi - \varphi) = -\cos\varphi$, tak

$$\cos\varphi = |\cos\angle(\overline{u},\, \overline{v})| = \frac{|\overline{u}.\overline{v}|}{\|\overline{u}\|\,\|\overline{v}\|}$$

□

Príklad 1.19. Vypočítajme uhol telesových uhlopriečok AG, BH kocky $ABCDEFGH$.

Riešenie

Zvoľme súradnicovú sústavu tak, aby bod A bol jej začiatkom, priamky AB, AD, AE súradnicovými osami v poradí o_x, o_y, o_z s jednotkovými bodmi B, D, E. Potom $A = (0,\, 0,\, 0)$, $B = (1,\, 0,\, 0)$, $G = (1,\, 1,\, 1)$, $H = (0,\, 1,\, 1)$. Smerovými vektormi priamok AG, BH sú

$$\overline{u} = G - A = (1,\, 1,\, 1), \quad \overline{v} = H - B = (-1,\, 1,\, 1)$$

Pre uhol φ telesových uhlopriečok platí

$$\cos\varphi = \frac{|(1,\, 1,\, 1).(-1,\, 1,\, 1)|}{\|(1,\, 1,\, 1)\|\,\|(-1,\, 1,\, 1)\|} = \frac{1}{3}$$

odkiaľ

$$\varphi \doteq 70^\circ 31' 44''$$

■

Veta 1.27. Nech $\varphi \in \langle 0,\ \frac{\pi}{2}\rangle$ je uhol priamky $p \equiv P\overline{u}$ a roviny $\gamma \equiv \overline{c}A$, potom

$$\sin\varphi = \frac{|\overline{u}.\overline{c}|}{\|\overline{u}\|\ \|\overline{c}\|}$$

Dôkaz

Uhol priamky p s rovinou γ je definovaný ako uhol priamky p s jej pravouhlým priemetom do roviny γ. Priamka $q \equiv A\overline{c}$, ktorá je kolmá na rovinu γ, zviera s p uhol $\psi = \frac{\pi}{2} - \varphi$. Preto

$$\sin\varphi = \sin(\frac{\pi}{2} - \psi) = \cos\psi = \frac{|\overline{u}.\overline{c}|}{\|\overline{u}\|\ \|\overline{c}\|}$$

□

Veta 1.28. Nech $\varphi \in \langle 0,\ \frac{\pi}{2}\rangle$ je uhol rovín $\gamma \equiv \overline{c}A,\ \delta \equiv \overline{d}B$, potom

$$\cos\varphi = \frac{|\overline{c}.\overline{d}|}{\|\overline{c}\|\ \|\overline{d}\|}$$

Dôkaz

Vyplýva to z toho, že uhol rovín $\gamma,\ \delta$ je rovnaký ako uhol priamok $p \equiv A\overline{c}$, $q \equiv A\overline{d}$, ktoré sú kolmé na roviny $\gamma,\ \delta$ v uvedenom poradí.

□

Príklad 1.20. Vypočítajme uhol rovín $\alpha \equiv ABC$, $\beta \equiv \overline{d}C$, ak $A = (1,\ -1,\ -2)$, $B = (3,\ 0,\ -1)$, $C = (4,\ 0, 0)$, $\overline{d} = (-1,\ 2,\ 1)$.

Riešenie

Na výpočet normálového vektora $\overline{n}$ roviny α použijeme vektorový súčin:

$$\overline{n} = (B - A) \times (C - A) = (2,\ 1,\ 1) \times (3,\ 1,\ 2) = \begin{vmatrix} \overline{e}_1, & \overline{e}_2, & \overline{e}_3 \\ 2, & 1, & 1 \\ 3, & 1, & 2 \end{vmatrix} = (1,\ -1,\ -1)$$

Ak označíme φ uhol rovín $\alpha,\ \beta$, tak

$$\cos\varphi = \frac{|\overline{n}.\overline{d}|}{\|\overline{n}\|\ \|\overline{d}\|} = \frac{|-1-2-1|}{\sqrt{1+1+1}\sqrt{1+4+1}} = \frac{4}{3\sqrt{2}} \doteq 0,9428090416$$

odkiaľ

$$\varphi \doteq 19°28'16''$$

■

Vzdialenosť bodov, priamok a rovín.

Definícia 1.19. Nech G, H sú dve neprázdne množiny bodov v $\mathbf{E}_3$. *Vzdialenosťou množín* G, H nazývame infimum vzdialeností bodov A, B, pričom $A \in G$, $B \in H$ a označujeme $|G,\ H|$. Symbolicky to môžeme zapísať takto:

$$|G,\ H| = \inf\{|A,\ B|; A \in G,\ B \in H\}$$

Veta 1.29. Nech G, H sú dve neprázdne množiny bodov v $\mathbf{E}_3$. $K \in G$, $L \in H$ sú také body, že pre všetky body $A,\ B \in G, C,\ D \in H$ je $L - K \perp B - A$, $L - K \perp D - C$, potom $|G,\ H| = |K,\ L|$.

Dôkaz

Vyberme ľubovoľne dva body $X \in G$, $Y \in H$ a označme $\overline{x} = K - X$, $\overline{y} = Y - L$. Potom $L - K \perp \overline{x}$, $L - K \perp \overline{y}$ a

$$\begin{aligned} |X,\ Y|^2 &= \|Y - X\|^2 = (Y - X)^2 = [(Y - L) + (L - K) + (K - X)]^2 = \\ &= (\overline{y} + (L - K) + \overline{x})^2 = \overline{y}^{\,2} + (L - K)^2 + \overline{x}^{\,2} + 2\underbrace{\overline{y}.(L - K)}_{0} + 2\overline{y}.\overline{x} + 2\underbrace{(L - K).\overline{x}}_{0} = \\ &= (L - K)^2 + \overline{y}^{\,2} + 2\overline{y}.\overline{x} + \overline{x}^{\,2} = (L - K)^2 + (\overline{y} + \overline{x})^2 = \\ &= \|L - K\|^2 + \|\overline{y} + \overline{x}\|^2 \geq \|L - K\|^2 = |K,\ L|^2 \end{aligned}$$

odkiaľ

$$|X,\, Y| \geq |K,\, L|$$

Z toho vyplýva

$$|G,\, H| = \inf\{|X,\, Y|; X \in G,\, Y \in H\} = |K,\, L|$$

□

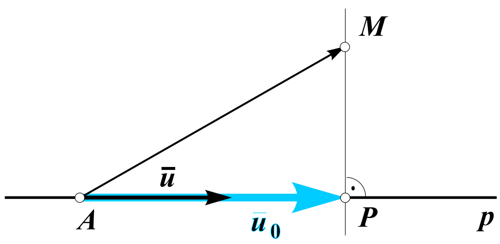
Veta 1.30. Nech v $\mathbf{E}_3$ je daný bod M, priamka $p \equiv A\overline{u}$ a rovina $\varrho : ax + by + cz + d = 0$. Označme $\overline{m} = M - A$. Potom

$$|M,\, p| = \frac{\|\overline{m} \times \overline{u}\|}{\|\overline{u}\|} = \sqrt{\|\overline{m}\|^2 - \frac{(\overline{m}.\overline{u})^2}{\|\overline{u}\|^2}}$$

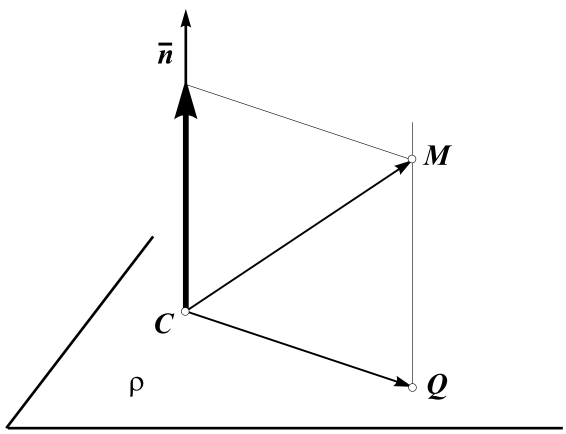
$$|M,\, \varrho| = \frac{|am_1 + bm_2 + cm_3 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Dôkaz

Nech P je ortogonálny (pravouhlý) priemet bodu M do priamky p, potom $P = A + \overline{u}_0$, kde $\overline{u}_0 = \frac{\overline{m}.\overline{u}}{\|\overline{u}\|^2}\,\overline{u}$ je ortogonálny priemet vektora $\overline{m}$ do vektora $\overline{u}$ (obr. 16). Zrejme $P \in p$ a $M - P \perp \overline{u}$. Preto



Obr. 16



Obr. 17

$$|M,\, p|^2 = |M,\, P|^2 = (M - P)^2 = ((M - A) - \overline{u}_0)^2 = (\overline{m} - \overline{u}_0)^2 = \overline{m}^{\,2} - 2\overline{m}.\overline{u} + \overline{u}_0^{\,2} =$$
$$= \|\overline{m}\|^2 - 2\frac{(\overline{m}.\overline{u})^2}{\|\overline{u}\|^2} + \frac{(\overline{m}.\overline{u})^2}{\|\overline{u}\|^4}\,\overline{u}^{\,2} = \|\overline{m}\|^2 - \frac{(\overline{m}.\overline{u})^2}{\|\overline{u}\|^2} =$$
$$= \frac{1}{\|\overline{u}\|^2}\left(\|\overline{m}\|^2\,\|\overline{u}\|^2 - \|\overline{m}\|^2\,\|\overline{u}\|^2\cos^2\angle(\overline{m},\, \overline{u})\right) = \frac{\|\overline{m}\|^2\,\|\overline{u}\|^2\sin^2\angle(\overline{m},\, \overline{u})}{\|\overline{u}\|^2} = \frac{\|\overline{m} \times \overline{u}\|^2}{\|\overline{u}\|^2}$$

Nech Q je ortogonálny priemet bodu M do roviny ϱ, t.j. $Q = C + \overline{v}$, kde C je ľubovoľný bod roviny ϱ a $\overline{v}$ je ortogonálny priemet vektora $M - C$ do smeru roviny ϱ (obr. 17). Zrejme $Q \in \varrho$ a vektor $M - Q$ je kolmý na každý smerový vektor roviny ϱ. Preto $|M,\, \varrho| = |M,\, Q| = \|M - Q\|$. Vektor $M - Q$ sa však rovná ortogonálnemu priemetu vektora $M - C$ do normálového vektora $\overline{n} = (a,\, b,\, c)$ roviny ϱ. Preto platí

$$|M,\, \varrho| = \|M - Q\| = \left\|\frac{(M - C).\overline{n}}{\|\overline{n}\|^2}\,\overline{n}\right\| = \frac{|(M - C).\overline{n}|}{\|\overline{n}\|}$$

Ak zvolíme $C = O - \dfrac{d}{\|\overline{n}\|^2}\,\overline{n}$, tak

$$|M,\, \varrho| = \frac{1}{\|\overline{n}\|^2}\left|\left((M - O) + \frac{d}{\|\overline{n}\|^2}\,\overline{n}\right).\overline{n}\right| = \frac{1}{\|\overline{n}\|^2}|(M - O).\overline{n} + d| = \frac{|am_1 + bm_2 + cm_3 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

□

Veta 1.31. Pre vzdialenosť priamok $p \equiv A\overline{u}$, $q \equiv B\overline{v}$ platí

$$|p, q| = \begin{cases} \dfrac{|[\overline{u}, \overline{v}, B - A]|}{\|\overline{u} \times \overline{v}\|}, & \text{ak } p, q \text{ sú mimobežné alebo rôznobežné} \\ |A, q|, & \text{ak } p, q \text{ sú rovnobežné} \end{cases}$$

Dôkaz

Predpokladajme, že priamky p, q sú mimobežné. Potom existuje práve jedna rovina, označme ju α, ktorá prechádza priamkou p ($p \subset \alpha$) a je rovnobežná s priamkou q. Každý bod priamky q má od roviny α rovnakú vzdialenosť, ktorá sa rovná vzdialenosti priamok p, q. Preto

$$|p, q| = |q, \alpha| = |B, \alpha|$$

Vzdialenosť bodu B od roviny α sa rovná veľkosti ortogonálneho priemetu vektora $B - A$ do normálového vektora roviny α. Normálový vektor roviny α je kolmý na smerové vektory priamok p, q, preto jedným normálovým vektorom roviny α je vektor $\overline{u} \times \overline{v}$. Potom

$$|p, q| = \left\| \frac{(B - A).(\overline{u} \times \overline{v})}{\|\overline{u} \times \overline{v}\|^2} (\overline{u} \times \overline{v}) \right\| = \frac{|(B - A).(\overline{u} \times \overline{v})|}{\|\overline{u} \times \overline{v}\|^2} \|\overline{u} \times \overline{v}\| = \frac{|[\overline{u}, \overline{v}, B - A]|}{\|\overline{u} \times \overline{v}\|}$$

Ak sú priamky p, q rôznobežné, tak $[\overline{u}, \overline{v}, B - A] = 0$ a vzdialenosť rôznobežných priamok je evidentne 0. Prípad rovnobežných priamok je zrejmý.

□

Príklad 1.21. Určte parametrické rovnice priamky p, ktorá prechádza bodom $P = (1, -2, 3)$, je rovnobežná s rovinou $\alpha : 2x - 3y + z + 13 = 0$, a vzdialenosť priamok p a $q : (x, y, z) = (3, -1, 2) + t(2, 1, -2)$ je $\frac{1}{3}$.

Riešenie

Smerový vektor $\overline{u} = (u_1, u_2, u_3)$ priamky p je kolmý na normálový vektor $\overline{n} = (2, -3, 1)$ roviny α, preto

$$2u_1 - 3u_2 + u_3 = 0$$

odkiaľ

$$u_3 = -2u_1 + 3u_2$$

Smerovým vektorom priamky q je $\overline{v} = (2, 1 - 2)$. Keďže $\overline{v}.\overline{n} = (2, 1 - 2).(2, -3, 1) = -3$, priamka q nie je rovnobežná s rovinou α. Z toho vyplýva, že priamka q nie je rovnobežná ani s priamkou p. Pre štvorec vzdialenosti priamok p, q potom platí

$$\frac{1}{9} = \frac{[\overline{u}, \overline{v}, Q - P]^2}{\|\overline{u} \times \overline{v}\|^2}$$

kde $Q = (3, -1, 2)$ je bod priamky q. Počítajme:

$$[\overline{u}, \overline{v}, Q - P] = \begin{vmatrix} u_1, & u_2, & u_3 \\ 2, & 1, & -2 \\ 2, & 1, & -1 \end{vmatrix} = u_1 - 2u_2$$

$$\overline{u} \times \overline{v} = \begin{vmatrix} \overline{e}_1, & \overline{e}_2, & \overline{e}_3 \\ u_1, & u_2, & u_3 \\ 2, & 1, & -2 \end{vmatrix} = (-2u_2 - u_3, 2u_1 + 2u_3, u_1 - 2u_2) =$$

$$= (2u_1 - 5u_2, -2u_1 + 6u_2, u_1 - 2u_2)$$

$$\|\overline{u} \times \overline{v}\|^2 = (2u_1 - 5u_2)^2 + (-2u_1 + 6u_2)^2 + (u_1 - 2u_2)^2 = 9u_1^2 - 48u_1u_2 + 65u_2^2$$

Dosaďme to do rovnice vyjadrujúcej vzdialenosť priamok p, q:

$$\frac{1}{9} = \frac{u_1^2 - 4u_1u_2 + 4u_2^2}{9u_1^2 - 48u_1u_2 + 65u_2^2}$$

$$9u_1^2 - 48u_1u_2 + 65u_2^2 = 9(u_1^2 - 4u_1u_2 + 4u_2^2)$$

$$u_2(-12u_1 + 29u_2) = 0$$

Odtiaľ

$$u_2 = 0 \quad \text{alebo} \quad u_1 = \frac{29}{12}u_2$$

Potom

$$u_3 = -2u_1 \quad \text{alebo} \quad u_3 = -\frac{58}{12}u_2 + 3u_2 = -\frac{22}{12}u_2$$

$$\overline{u} = (1,\, 0,\, -2)u_1 \quad \text{alebo} \quad \overline{u} = \left(\frac{29}{12},\, 1,\, -\frac{58}{12}\right)u_2$$

Vidíme, že úloha má 2 riešenia. Existujú teda dve priamky p_1 a p_2, ktoré vyhovujú zadaniu úlohy. Ich smerové vektory sú $(1,\, 0,\, -2)$ resp. $(29,\, 12,\, -58)$ a parametrické rovnice

$$p_1 : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 \\ z = 3 - 2t \end{cases} \qquad p_2 : \begin{cases} x = 1 + 29t \\ y = -2 + 12t \\ z = 3 - 58t \end{cases}$$

■

Veta 1.32. Pre vzdialenosť rovnobežných rovín $\alpha : ax+by+cz+d = 0$, $\beta : ax+by+cz+d' = 0$ platí

$$|\alpha,\, \beta| = \frac{|d - d'|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Dôkaz

Vzdialenosť rovín α, β sa zrejme rovná vzdialenosti ľubovoľného bodu $M \in \beta$ od roviny α. Pre bod $M = (m_1,\, m_2,\, m_3)$ však platí $am_1 + bm_2 + cm_3 = -d'$, a tak

$$|\alpha,\, \beta| = |M,\, \alpha| = \frac{|am_1 + bm_2 + cm_3 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|d - d'|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

□

Cvičenie 2.

(1) Napíšte vektorovú rovnicu, resp. parametrické rovnice priamky, ak sú dané jej
  (a) dva body $A = (2,\, -1,\, 3)$, $B = (4,\, 3,\, 2)$,
  [$(x,\, y,\, z) = (2,\, -1,\, 3) + t(2,\, 4,\, -1),\ t \in \mathbf{R}$]
  (b) bod $A = (-2,\, -3,\, 4)$ a smerový vektor $\overline{u} = (2,\, 2,\, -3)$.
  [$(x,\, y,\, z) = (-2,\, -3,\, 4) + t(2,\, 2,\, -3),\ t \in \mathbf{R}$]

(2) Zistite, ktoré z bodov $A = (-1,\, 1,\, 1)$, $B = (1,\, 0,\, 2)$, $C = (-3,\, 2,\, 0)$, $D = (3,\, 2,\, 1)$, $E = (7,\, 3,\, 1)$ ležia na priamke
  (a) $(x,\, y,\, z) = (3,\, -1,\, 3) + t(2,\, -1,\, 1)$, [$A,\, B,\, C$]
  (b) $x = 1 + 4t,\ y = \frac{3}{2} + t,\ z = 1$, [$A,\, D,\, E$]
  (c) $\frac{x+5}{6} = \frac{y+3}{3} = 3 - z$. [$B,\, E$]

(3) Napíšte vektorovú rovnicu, resp. parametrické rovnice roviny, ak sú dané jej dva body $A = (2,\, 1,\, -3)$, $B = (1,\, -1,\, 2)$ a smerový vektor $\overline{u} = (2,\, 2, 3)$
  [$(x,\, y,\, z) = (2,\, 1,\, -3) + t(1,\, 2,\, -5) + s(2,\, 2, 3)$]

(4) Napíšte všeobecnú rovnicu roviny určenej
  (a) troma bodmi $A = (1,\, -1,\, 1)$, $B = (2,\, 1,\, -3)$, $C = (1,\, 4,\, 2)$, [$22x - y + 5z - 28 = 0$]
  (b) bodom $A = (-3, 2, 4)$ a normálovým vektorom $\overline{n} = (2, -3, 5)$. [$2x - 3y + 5z - 8 = 0$]

(5) Zistite, ktoré z bodov $A = (1, 2, -1)$, $B = (1, 2, 2)$, $C = (3, 1, 2)$, $D = (-4, 2, 0)$ ležia v rovine

(a) $(x,y,z) = (6,2,-2) + t(5,0,-1) + s(1,1,0)$, $[A,\ D]$

(b) $x + 17y + 5z - 30 = 0$ $[A,\ C,\ D]$

(6) Určte vzájomnú polohu priamok p, q. V prípade, že sú rôznobežné, určte ich priesečník R.

(a) $p: x = -t,\ y = -4 - 5t,\ z = 3 + 3t$,
$q: \begin{cases} 4x + y + 3z - 5 = 0 \\ 7x - 2y - z - 5 = 0 \end{cases}$, [totožné]

(b) $p: \begin{cases} x = 3 - 6t \\ y = -1 + 4t \\ z = t \end{cases}$, $q: \begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = 4 \\ z = 3 - t \end{cases}$, [mimobežné]

(c) $p: \frac{x}{-3} = \frac{y-2}{3}, z = 1$,
$q: (x,y,z) = (6,14,11) + t(5,13,10)$ [rôznobežné, $R = (1,1,1)$]

(d) $p: \begin{cases} x + z - 1 = 0 \\ 3x + y - z + 13 = 0 \end{cases}$, $q: \begin{cases} x - 2y + 3 = 0 \\ y + 2z - 8 = 0 \end{cases}$, [rôznobežné, $R = (-3,0,4)$]

(e) $p: x = 2t,\ y = 0,\ z = -2t$,
$q: \begin{cases} x + y + z - 3 = 0 \\ x - y + z - 1 = 0 \end{cases}$. [rovnobežné rôzne]

(7) Určte vzájomnú polohu rovín; v prípade, že sú rôznobežné, napíšte parametrické rovnice ich priesečnice.

(a) $x + y + 2z - 3 = 0$, $x - y + z - 1 = 0$, $[x = 2 + 3t, y = 1 + t, z = -2t]$

(b) $(x,y,z) = (1,-1,1) + t(2,1,-3) + s(1,-1,2)$,
$2x + y - 3z - 17 = 0$, $[x = 2 + 24t, y = 1 - 9t, z = -4 + 43t]$

(c) $(x,y,z) = (-2,3,-1) + s(1,0,-1) + t(-1,2,3)$,
$x - y + z + 10 = 0$, [rovnobežné rôzne]

(d) $(x,y,z) = (-1,3,-2) + s(0,1,1) + t(1,-1,-2)$,
$x - y + z + 6 = 0$. [totožné]

(8) Zistite vzájomnú polohu priamky a roviny; v prípade rôznobežnosti určte priesečník.

(a) $x = 2 + 4t,\ y = -1 + t,\ z = 2 - t$,
$4x + y - z + 13 = 0$, $[(-2,-2,3)]$

(b) $x = 2 - 3t,\ y = 7 - 2t,\ z = -1 + 4t$,
$x = 1 + t,\ y = 1 + 4s + 2t,\ z = s - t$, [rovnobežné rôzne]

(c) $\begin{cases} 2x - y + 3z + 4 = 0 \\ x - 2y - 2z + 2 = 0 \end{cases}$, $4x - 5y - z + 8 = 0$, [priamka leží v rovine]

(9) Vypočítajte uhol priamok:

(a) $(x,y,z) = (2,-1,1) + t(-3,0,1)$, $(x,y,z) = (3,4,7) + t(2,0,1)$, $[\frac{\pi}{4}]$

(b) $\begin{cases} 2x + 2y + z - 7 = 0 \\ x - 2y + 2z + 75 = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} 9x - 2y + z - 16 = 0 \\ 3x - y - z + 3 = 0 \end{cases}$. $[\frac{\pi}{2}]$

(10) Vypočítajte uhol rovín:

(a) $\sqrt{2}x + y - z - 10 = 0$, $\sqrt{2}x - y - z = 0$, $[\frac{\pi}{3}]$

(b) $(x,y,z) = (10,-1,1) + s(1,3,1) + t(-2,1,-2)$,
$(x,y,z) = (3,4,-2) + s(4,3,-3) + t(1,-1,1)$. $[\frac{\pi}{3}]$

(11) Vypočítajte uhol priamky s rovinou:

(a) $(x,y,z) = (1,-1,1) + s(11,-7,-8)$, $7x - 8y + 2z + 6 = 0$ $[\frac{\pi}{4}]$

(b) $\frac{x+1}{-2} = y - 4 = z + 3$, $2x - 4y + 2z + 7 = 0$. $[\frac{\pi}{6}]$

(12) Vypočítajte vzdialenosť bodu $M = (2,3,5)$ od priamky $p: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-1} = z - 3$. $[2\sqrt{2}]$

(13) Vypočítajte veľkosť telesových výšok štvorstena $ABCD$, ak $A = (2,1,0)$, $B = (1,-1,1)$, $C = (3,0,-1)$, $D = (0,1,-3)$. $[v_A = \frac{3}{\sqrt{5}},\ v_B = \frac{15}{\sqrt{38}},\ v_C = \frac{15}{\sqrt{77}},\ v_D = \frac{5}{\sqrt{2}}]$

(14) Vypočítajte vzdialenosť priamok $p: \begin{cases} 2x + 2y - z - 10 = 0 \\ x - y - z - 22 = 0 \end{cases}$, $q: \frac{x+7}{3} = 5 - y = \frac{z-9}{4}$. [25]

(15) Napíšte rovnicu roviny, ktorá

(a) obsahuje priamky $(x, y, z) = (1, 2, -3) + t(1, -1, 2)$, $(x, y, z) = (3, -1, -1) + t(-2, 2, -4)$, $[4x + 2y - z - 11 = 0]$

(b) prechádza bodom $B = (3, 0, 1)$ a je kolmá na priamku $p : \left\{ \begin{array}{l} x + y - z + 1 = 0 \\ 2x - y + z - 1 = 0 \end{array} \right.$. $[y + z - 1 = 0]$

(c) prechádza bodom $A = (3, 2, -2)$ kolmo na rovinu $\alpha : 5x - 2y + 5z - 11 = 0$ a s rovinou $\beta : x - 4y - 8z + 1 = 0$ zviera uhol $\frac{\pi}{4}$. $[x - z - 5 = 0,\ x + 20y + 7z - 29 = 0]$

(16) Napíšte parametrické rovnice priamky, ktorá

(a) prechádza bodom $A = (3, 4, -1)$ rovnobežne s rovinou $\beta : 2x - y + 3z - 1 = 0$ a kolmo na priamku $q : (x, y, z) = (0, 1, 2) + t(1, -2, 1)$, $[x = 3 + 5t, y = 4 + t, z = -1 - 3t]$

(b) prechádza bodom $A = (1, 1, 1)$ a kolmo pretína priamku $x = 3 + 3t$, $y = 18 + 8t$, $z = 10 + 4t$, $[x = 1 - 4t, y = 1 + t, z = 1 + t]$

(c) prechádza bodom $A = (3, -2, -4)$ rovnobežne s rovinou $\varrho : 3x - 2y - 3z - 7 = 0$ a pretína priamku $q : \left\{ \begin{array}{l} 2x + 3y + 8 = 0 \\ y + z + 3 = 0 \end{array} \right.$. $[x = 3 + 5t, y = -2 + 10t, z = -4 + 9t]$

(17) Na priamke $p : \left\{ \begin{array}{l} x + y + 2z - 1 = 0 \\ 3x + 4y - z - 29 = 0 \end{array} \right.$ nájdite bod, ktorý má od bodov $A = (3, 4, 11)$, $B = (-5, -2, -13)$ rovnakú vzdialenosť. $[(2, 5, -3)]$

(18) Nájdite stred a polomer opísanej kružnice $\triangle ABC$, ak $A = (2, 1, -2)$, $B = (2, 1, 2)$, $C = (4, 1, 4)$. $[(6, 1, 0), 2\sqrt{5}]$

1.5. Kvadratické plochy.

Definícia 1.20. *Kvadrika* κ je množina všetkých bodov $X = (x,\ y,\ z)$ v $\mathbf{E}_3$, ktoré vyhovujú rovnici

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a_0 = 0$$

kde a_{ij}, a_i sú reálne čísla, a aspoň jedno z čísel a_{11}, a_{22}, a_{133}, a_{12}, a_{13}, a_{23} je rôzne od nuly.

Poznámka 1.16. Rovnicu kvadriky κ môžeme zapísať aj pomocou matíc:

$$(x,\ y,\ z,\ 1) \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & a_1 \\ a_{12}, & a_{22}, & a_{23}, & a_2 \\ a_{13}, & a_{23}, & a_{33}, & a_3 \\ a_1, & a_2, & a_3, & a_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Maticu štvrtého stupňa v tejto rovnici nazývame *maticou kvadriky* κ. Ak je táto matica regulárna resp. singulárna, tak κ nazývame *regulárnou* resp. *singulárnou kvadrikou.*
Kvadrika κ je buď prázdnou množinou (napr. $\kappa : x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$), bodom (napr. $\kappa : x^2 + y^2 + z^2 = 0$), priamkou (napr. $x^2 + y^2 = 0$), dvojicou rôznych či totožných rovín (napr. $\kappa : (x+y+z+2)(x-y+z) = 0$), alebo *kvadratickou plochou*, medzi ktoré patrí *elipsoid*, *jednodielny* a *dvojdielny hyperboloid*, *eliptický* a *hyperbolický paraboloid*, *eliptická kužeľová plocha*, *eliptická*, *parabolická* a *hyperbolická valcová plocha.*

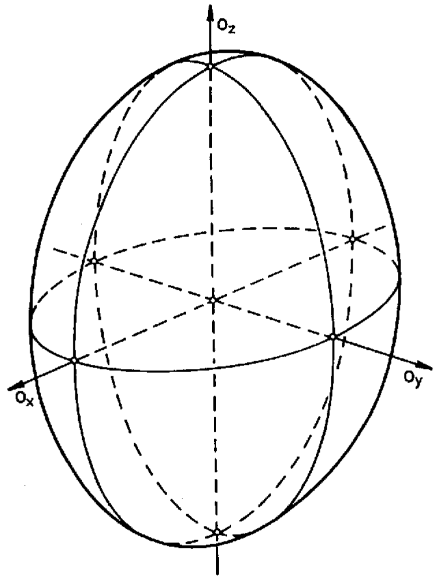
Elipsoid. (obr. 18)

Je to regulárna kvadratická plocha daná rovnicou

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0, \quad a,\ b,\ c > 0 \tag{1}$$

Z rovnice (1) vyplýva, že ak bod $X = (x,\ y,\ z)$ leží na elipsoide, tak na ňom leží aj bod

1. $X_1 = (-x,\ -y,\ -z)$, čo je bod súmerný s bodom X podľa bodu O. Elipsoid je teda súmerný podľa bodu O. Tento bod sa nazýva *stred elipsoidu.*
2. $X_2 = (x,\ -y,\ -z)$, $X_3 = (-x,\ y,\ -z)$, $X_4 = (-x,\ -y,\ z)$, čo sú body súmerné s bodom X podľa priamok v poradí o_x, o_y, o_z. Preto elipsoid je súmerný podľa týchto priamok, ktoré sa nazývajú *osi elipsoidu.*



Obr. 18

3. $X_5 = (x,\, y,\, -z)$, $X_6 = (-x,\, y,\, z)$, $X_7 = (x,\, -y,\, z)$, čo sú body súmerné s bodom X podľa súradnicových rovín v poradí π_{xy}, π_{yz}, π_{xz}. Elipsoid je teda súmerný podľa týchto rovín.

Čísla a, b, c sa nazývajú *dĺžky poloosí elipsoidu.* Osi elipsoidu pretínajú elipsoid v bodoch $(\pm a,\, 0,\, 0)$, $(0,\, \pm b,\, 0)$, $(0,\, 0,\, \pm c)$, ktoré sa nazývajú *vrcholy elipsoidu.*

Zistime, čo je rezom elipsoidu rovinou (t.j. prienikom elipsoidu a roviny) $z = k,\ k \in \mathbf{R}$, ktorá je rovnobežná s rovinou $\pi_{xy} : z = 0$. Dosaďme teda $z = k$ do rovnice (1) a po úprave dostaneme

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{c^2 - k^2}{c^2}$$

Ak $|k| > c$, tak tejto rovnici nevyhovuje žiadny bod priestoru $\mathbf{E}_3$. Rezom elipsoidu rovinou $z = k$ je v tomto prípade $\emptyset$.

Ak $k = c$ resp. $k = -c$, tak rezom je vrchol elipsoidu $(0,\, 0,\, c)$, resp. $(0,\, 0,\, -c)$.

Ak $|k| < c$, tak číslo na pravej strane rovnice je kladné, a po vydelení rovnice týmto číslom dostaneme

$$\frac{x^2}{(ad)^2} + \frac{y^2}{(bd)^2} = 1$$

kde $d = \sqrt{\frac{c^2 - k^2}{c^2}}$, čo v rovine $z = k$ je rovnica elipsy.

Podobne zistíme, že rez rovinou $y = k,\ k \in \mathbf{R}$ je

a) $\emptyset$, ak $|k| > b$,

b) bod $(0,\, b,\, 0)$, resp. $(0,\, -b,\, 0)$, ak $k = b$, resp. $k = -b$,

c) elipsa $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = \dfrac{b^2 - k^2}{b^2}$, $x = k$, ak $|k| < b$.

Rez rovinou $x = k,\ k \in \mathbf{R}$ je

a) $\emptyset$, ak $|k| > a$,

b) bod $(a,\, 0,\, 0)$, resp. $(-a,\, 0,\, 0)$, ak $k = a$, resp. $k = -a$,

c) elipsa $\dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = \dfrac{a^2 - k^2}{a^2}$, $x = k$, ak $|k| < a$.

Ak $a = b$, tak rezom elipsoidu rovinou $z = k,\ |k| < c$ je kružnica

$$x^2 + y^2 = a^2\, \frac{c^2 - k^2}{c^2},\ z = k$$

Preto takýto elipsoid vznikne rotáciou elipsy

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0, \quad x = 0$$

okolo súradnicovej osi o_z a tento elipsoid sa nazýva *rotačný*.

Špeciálnym prípadom elipsoidu, ak $a = b = c = r$ je *guľová plocha* so stredom O a polomerom r, ktorá má rovnicu

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

Ľahko sa dokáže, že guľová plocha so stredom $S = (s_1,\, s_2,\, s_3)$ a polomerom r má rovnicu

$$(x - s_1)^2 + (y - s_2)^2 + (z - s_3)^2 = r^2$$

Pripomeňme ešte, že rovina v $\mathbf{E}_3$ sa nazýva *dotyková rovina guľovej plochy*, ak pretína guľovú plochu v jedinom bode, čo nastane práve vtedy, keď vzdialenosť stredu guľovej plochy od roviny sa rovná polomeru guľovej plochy.

Posuňme elipsoid ε daný rovnicou (1) o vektor $\overline{s} = (s_1,\, s_2,\, s_3)$. Stredom posunutého elipsoidu, označme ho ε', je bod $S = (s_1,\, s_2,\, s_3)$ a jeho osami sú priamky prechádzajúce bodom S rovnobežne so súradnicovými osami. Aká je rovnica elipsoidu ε'?
Posunutím bodu W o vektor $\overline{s}$ dostaneme bod $W' = W + \overline{s}$. Ich súradnice splňujú vzťah

$$\begin{aligned} w_1 &= w_1' - s_1 \\ w_2 &= w_2' - s_2 \\ w_3 &= w_3' - s_3 \end{aligned}$$

Bod W' leží na elipsoide ε' práve vtedy, keď W leží na ε, t.j., keď

$$\frac{(w_1' - s_1)^2}{a^2} + \frac{(w_2' - s_2)^2}{b^2} + \frac{(w_3' - s_3)^2}{c^2} - 1 = 0$$

Z toho vyplýva, že epsoid ε' so stredom $S = (s_1,\, s_2,\, s_3)$ a osami rovnobežnými so súradnicovými osami je daný rovnicou

$$\frac{(x - s_1)^2}{a^2} + \frac{(y - s_2)^2}{b^2} + \frac{(z - s_3)^2}{c^2} - 1 = 0$$

Dvojdielny hyperboloid. (obr. 19)

Je to regulárna kvadratická plocha daná rovnicou

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0, \quad a,\, b,\, c > 0$$

Je súmerný podľa súradnicových rovín, ďalej podľa súradnicových osí, ktoré nazývame *osi dvojdielneho hyperboloidu*. Priesečník osí dvojdielneho hyperboloidu je jeho *stred*. Súradnicová os o_z pretína dvojdielny hyperboloid v jeho *vrcholoch* $(0,\, 0,\, c)$, $(0,\, 0,\, -c)$.

Rez rovinou $x = k,\ k \in \mathbf{R}$ je hyperbola

$$-\frac{y^2}{(bd)^2} + \frac{z^2}{(cd)^2} = 1, \quad x = k,$$

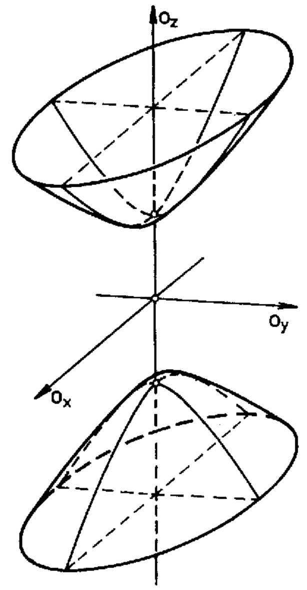
kde $d = \sqrt{\dfrac{a^2 + k^2}{a^2}}$.

Rez rovinou $y = k,\ k \in \mathbf{R}$ je hyperbola

$$-\frac{x^2}{(ad)^2} + \frac{z^2}{(cd)^2} = 1, \quad y = k,$$

kde $d = \sqrt{\dfrac{b^2 + k^2}{b^2}}$.

Rez rovinou $z = k,\ k \in \mathbf{R}$ je
a) $\emptyset$, ak $|k| < c$,



Obr. 19

b) bod $(0,\, 0,\, c)$, resp. $(0,\, 0,\, -c)$, ak $k = c$, resp. $k = -c$,

c) elipsa $\dfrac{x^2}{(ad)^2} + \dfrac{y^2}{(bd)^2} = 1,\ y = k$, ak $|k| > c$, pričom $d = \sqrt{\dfrac{k^2 - c^2}{c^2}}$.

Ak $a = b$, nazývame takýto dvojdielny hyperboloid *rotačný*. Vznikne rotáciou hyperboly $-\dfrac{y^2}{(b)^2} + \dfrac{z^2}{(c)^2} = 1,\ x = 0$ okolo osi o_z.

Dvojdielny hyperboloid, ktorého stred je bod S, osi sú rovnobežné so súradnicovými osami a os, ktorá pretína tento hyperboloid, je rovnobežná so súradnicovou osou
a) o_z,
b) o_x,
c) o_y,
má rovnicu

a) $$\frac{(x - s_1)^2}{a^2} + \frac{(y - s_2)^2}{b^2} - \frac{(z - s_3)^2}{c^2} + 1 = 0,$$

b) $$-\frac{(x - s_1)^2}{a^2} + \frac{(y - s_2)^2}{b^2} + \frac{(z - s_3)^2}{c^2} + 1 = 0,$$

c) $$\frac{(x - s_1)^2}{a^2} - \frac{(y - s_2)^2}{b^2} + \frac{(z - s_3)^2}{c^2} + 1 = 0.$$

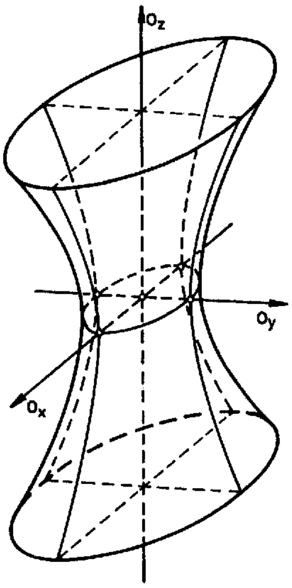
Jednodielny hyperboloid. (obr. 20)
Je to regulárna kvadratická plocha daná rovnicou

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0, \quad a,\, b,\, c > 0$$

Je súmerný podľa súradnicových rovín, ďalej podľa súradnicových osí - *osi jednodielneho hyperboloidu* a tiež podľa bodu O - *stred jednodielneho hyperboloidu*. Osi jednodielneho hyperboloidu o_x, o_y ho pretínajú vo *vrcholoch* $(\pm a,\, 0,\, 0)$, $(0,\, \pm b,\, 0)$.

Rez rovinou $x = k,\ k \in \mathbf{R}$ je

a) hyperbola $-\dfrac{y^2}{(bd)^2} + \dfrac{z^2}{(cd)^2} = 1,\ x = k$, kde $d = \sqrt{\dfrac{k^2 - a^2}{a^2}}$, ak $|k| > a$



Obr. 20

b) dve priamky $\begin{cases} \dfrac{y}{b} - \dfrac{z}{c} = 0 \\ x = k \end{cases}$, $\begin{cases} \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 0 \\ x = k \end{cases}$, ak $|k| = a$

c) hyperbola $\dfrac{y^2}{(bd)^2} - \dfrac{z^2}{(cd)^2} = 1,\ x = k$, kde $d = \sqrt{\dfrac{a^2 - k^2}{a^2}}$, ak $|k| < a$.

Rez rovinou $y = k,\ k \in \mathbf{R}$ je

a) hyperbola $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = \dfrac{b^2 - k^2}{b^2},\ y = k$, ak $|k| \neq b$

b) dve priamky $\begin{cases} \dfrac{x}{a} - \dfrac{z}{c} = 0 \\ y = k \end{cases}$, $\begin{cases} \dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c} = 0 \\ y = k \end{cases}$, ak $|k| = b$.

Rez rovinou $z = k,\ k \in \mathbf{R}$ je elipsa $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{c^2 + k^2}{c^2},\ z = k$.

Ak $a = b$, je jednodielny hyperboloid *rotačný* a vznikne rotáciou hyperboly $\dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1,\ x = 0$ okolo osi o_z.

Jednodielny hyperboloid, ktorého stred je bod S, osi sú rovnobežné so súradnicovými osami a os, ktorá jednodielny hyperboloid nepretína je rovnobežná so súradnicovou osou
a) o_z,
b) o_x,
c) o_y,
má rovnicu

a) $$\frac{(x - s_1)^2}{a^2} + \frac{(y - s_2)^2}{b^2} - \frac{(z - s_3)^2}{c^2} - 1 = 0,$$

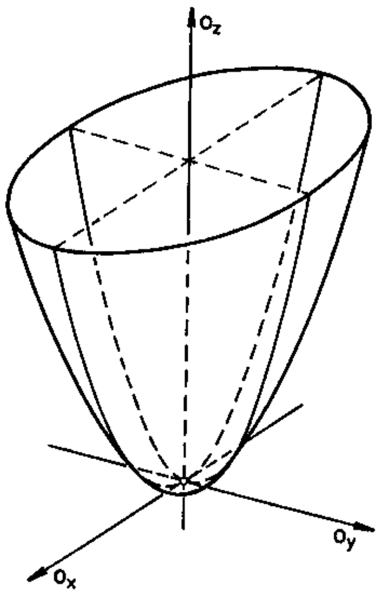
b) $$-\frac{(x - s_1)^2}{a^2} + \frac{(y - s_2)^2}{b^2} + \frac{(z - s_3)^2}{c^2} - 1 = 0,$$

c) $$\frac{(x - s_1)^2}{a^2} - \frac{(y - s_2)^2}{b^2} + \frac{(z - s_3)^2}{c^2} - 1 = 0.$$

Eliptický paraboloid. (obr. 21)

Je to regulárna kvadratická plocha daná rovnicou

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 2z = 0, \quad a, b > 0$$



Obr. 21

Je súmerný podľa súradnicových rovín π_{xz} a π_{yz} a tiež podľa súradnicovej osi o_z - *os eliptického paraboloidu.* Táto pretína eliptický paraboloid v jeho *vrchole* $O = (0\,0,\ 0)$.

Rez rovinou $x = k,\ k \in \mathbf{R}$, je parabola $z = \dfrac{1}{2b^2}y^2 + \dfrac{k^2}{2a^2},\ x = k.$

Rez rovinou $y = k,\ k \in \mathbf{R}$, je parabola $z = \dfrac{1}{2a^2}x^2 + \dfrac{k^2}{2b^2},\ y = k.$

Rez rovinou $z = k,\ k \in \mathbf{R}$, je

a) elipsa $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 2k,\ z = k$, ak $k > 0$,

b) bod O, ak $k = 0$,

c) $\emptyset$, ak $k < 0$.

Ak $a = b$, je eliptický paraboloid *rotačný* a vznikne rotáciou paraboly $z = \dfrac{1}{2b^2}y^2,\ x = 0$ okolo osi o_z.

Eliptický paraboloid s vrcholom $V = (v_1,\ v_2,\ v_3)$ a
a) osou rovnobežnou s o_z a rovinami súmernosti rovnobežnými s π_{xz} a π_{yz},
b) osou rovnobežnou s o_x a rovinami súmernosti rovnobežnými s π_{xy} a π_{xz},
c) osou rovnobežnou s o_y a rovinami súmernosti rovnobežnými s π_{yz} a π_{xy}
má rovnicu

a) $\dfrac{(x-v_1)^2}{a^2} + \dfrac{(y-v_2)^2}{b^2} - 2(z-v_3) = 0$, resp. $\dfrac{(x-v_1)^2}{a^2} + \dfrac{(y-v_2)^2}{b^2} + 2(z-v_3) = 0$

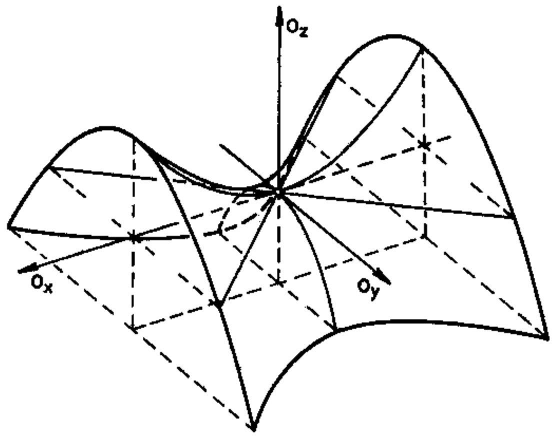
b) $\dfrac{(y-v_2)^2}{b^2} + \dfrac{(z-v_3)^2}{c^2} - 2(x-v_1) = 0$, resp. $\dfrac{(y-v_2)^2}{b^2} + \dfrac{(z-v_3)^2}{c^2} + 2(x-v_1) = 0$

c) $\dfrac{(x-v_1)^2}{a^2} + \dfrac{(z-v_3)^2}{c^2} - 2(y-v_2) = 0$, resp. $\dfrac{(x-v_1)^2}{a^2} + \dfrac{(z-v_3)^2}{c^2} + 2(y-v_2) = 0.$

Hyperbolický paraboloid. (obr. 22)

Je to regulárna kvadratická plocha daná rovnicou

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 2z = 0, \quad a, b > 0$$



Obr. 22

Je súmerný podľa súradnicových rovín π_{xz} a π_{yz} a tiež podľa súradnicovej osi o_z - *os hyperbolického paraboloidu.* Tá ho pretína vo *vrchole* $O = (0, 0, 0)$.

Rez rovinou $x = k,\ k \in \mathbf{R}$, je parabola $z = -\dfrac{1}{2b^2}y^2 + \dfrac{k^2}{2a^2},\ x = k$.

Rez rovinou $y = k,\ k \in \mathbf{R}$, je parabola $z = \dfrac{1}{2a^2}x^2 - \dfrac{k^2}{2b^2},\ y = k$.

Rez rovinou $z = k,\ k \in \mathbf{R}$, je

a) hyperbola $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 2k,\ z = k$, ak $k \neq 0$,

b) dve priamky $\left\{\begin{array}{l} \dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b} = 0 \\ z = 0 \end{array}\right.$, $\left\{\begin{array}{l} \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 0 \\ z = 0 \end{array}\right.$, ak $k = 0$.

Všimnime si, že všetky paraboly $z = -\dfrac{1}{2b^2}y^2 + \dfrac{k^2}{2a^2},\ x = k$ sú navzájom zhodné. Takisto sú zhodné aj paraboly $z = \dfrac{1}{2a^2}x^2 - \dfrac{k^2}{2b^2},\ y = k$. Z toho vyplýva, že hyperbolický paraboloid vznikne posúvaním paraboly $z = -\dfrac{1}{2b^2}y^2,\ x = 0$ tak, že jej vrchol sa pohybuje po parabole $z = \dfrac{1}{2a^2}x^2,\ y = 0$.

Hyperbolický paraboloid s vrcholom $V = (v_1, v_2, v_3)$ a
a) osou rovnobežnou s o_z a rovinami súmernosti rovnobežnými s π_{xz} a π_{yz},
b) osou rovnobežnou s o_x a rovinami súmernosti rovnobežnými s π_{xy} a π_{xz},
c) osou rovnobežnou s o_y a rovinami súmernosti rovnobežnými s π_{yz} a π_{xy}
má rovnicu

a) $\dfrac{(x-v_1)^2}{a^2} - \dfrac{(y-v_2)^2}{b^2} - 2(z-v_3) = 0$, resp. $-\dfrac{(x-v_1)^2}{a^2} + \dfrac{(y-v_2)^2}{b^2} - 2(z-v_3) = 0$

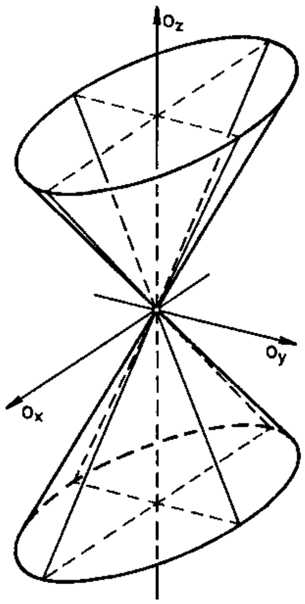
b) $\dfrac{(y-v_2)^2}{b^2} - \dfrac{(z-v_3)^2}{c^2} - 2(x-v_1) = 0$, resp. $-\dfrac{(y-v_2)^2}{b^2} + \dfrac{(z-v_3)^2}{c^2} - 2(x-v_1) = 0$

c) $\dfrac{(x-v_1)^2}{a^2} - \dfrac{(z-v_3)^2}{c^2} - 2(y-v_2) = 0$, resp. $-\dfrac{(x-v_1)^2}{a^2} + \dfrac{(z-v_3)^2}{c^2} - 2(y-v_2) = 0$.

Eliptická kužeľová plocha. (obr. 23)

Je to singulárna kvadratická plocha daná rovnicou

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z^2 = 0, \quad a, b > 0$$



Obr. 23

Je súmerná podľa všetkých súradnicových rovín, súradnicových osí a tiež podľa bodu O - *vrchol eliptickej kužeľovej plochy.*

Rez rovinou $x = k,\ k \in \mathbf{R}$ je

a) hyperbola $-\frac{y^2}{b^2} + z^2 = \frac{k^2}{a^2},\ x = k$, ak $k \neq 0$,

b) dve priamky $\begin{cases} \frac{y}{b} - z = 0 \\ x = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} \frac{y}{b} + z = 0 \\ x = 0 \end{cases}$, ak $k = 0$.

Rez rovinou $y = k,\ k \in \mathbf{R}$ je

a) hyperbola $-\frac{x^2}{a^2} + z^2 = \frac{k^2}{b^2},\ y = k$, ak $k \neq 0$,

b) dve priamky $\begin{cases} \frac{x}{a} - z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} \frac{x}{a} + z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$, ak $k = 0$.

Rez rovinou $z = k,\ k \in \mathbf{R}$ je

a) elipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = k^2,\ x = k$, ak $k \neq 0$,

b) bod $O = (0, 0, 0)$ ak $k = 0$.

Dve roviny súmernosti eliptickej kužeľovej plochy pretínajú túto plochu v priamkach.V našom prípade týmito rovinami sú π_{xz}, π_{yz} Priesečnica týchto rovín sa nazýva *os eliptickej kužeľovej plochy.*

Ak $a = b$, tak túto plochu nazývame *rotačná kužeľová plocha* a vznikne rotáciou priamky $\frac{y}{a} - z = 0,\ x = 0$ okolo osi o_z.

Eliptická kužeľová plocha s vrcholom $V = (v_1, v_2, v_3)$ a osou rovnobežnou s

a) o_z,

b) o_x,
c) o_y
má rovnicu

a) $$\frac{(x-v_1)^2}{a^2}+\frac{(y-v_2)^2}{b^2}-(z-v_3)^2=0,$$

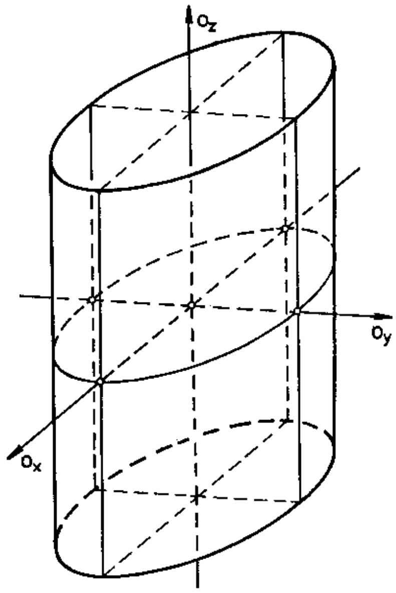
b) $$-(x-v_1)^2+\frac{(y-v_2)^2}{b^2}+\frac{(z-v_3)^2}{c^2}=0,$$

c) $$\frac{(x-v_1)^2}{a^2}-(y-v_2)^2+\frac{(z-v_3)^2}{c^2}=0.$$

Eliptická valcová plocha. (obr. 24)

Je to singulárna kvadratická plocha daná rovnicou

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0, \quad a,b>0$$



Obr. 24

Je súmerná podľa rovín π_{xz}, π_{yz} a všetkých rovín rovnobežných s π_{xy}. Súradnicové osi sú jej osami súmernosti. Každý bod na osi o_z je jej stredom súmernosti. Táto priamka (o_z) sa nazýva *os eliptickej valcovej plochy.*

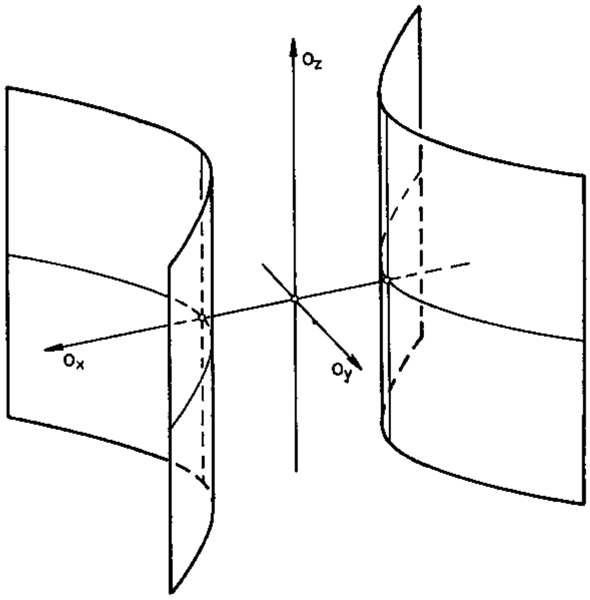
Rez rovinou $z=0$ je elipsa $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, $z=0$, ktorá sa nazýva aj *riadiaca krivka.* Priamo z rovnice vidieť, že eliptická valcová plocha je množina všetkých bodov ležiacich na priamkach, ktoré sú rovnobežné s osou o_z a prechádzajú bodmi riadiacej krivky.

Hyperbolická valcová plocha. (obr. 25)

Je to singulárna kvadratická plocha daná rovnicou

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0, \quad a,b>0$$

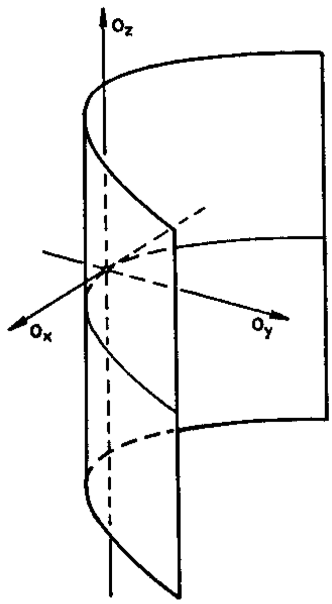
Každý bod osi o_z je stredom súmernosti tejto plochy. Rovinami súmernosti sú roviny π_{xz}, π_{yz} a každá rovina rovnobežná s π_{xy}. Táto plocha je množinou všetkých bodov priamok, ktoré sú rovnobežné s osou o_z a prechádzajú bodmi hyperboly $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0$, $z=0$.



Obr. 25

Parabolická valcová plocha. (obr. 26)
Je to singulárna kvadratická plocha daná rovnicou

$$x^2 - 2py = 0, \quad p > 0$$



Obr. 26

Jej rovinami súmernosti sú rovina π_{yz} a každá rovina rovnobežná s π_{xy}. Táto plocha je množinou všetkých bodov priamok, ktoré sú rovnobežné s osou o_z a prechádzajú bodmi paraboly $x^2 - 2py = 0$, $z = 0$.

Príklad 1.22. Určte typ kvadratickej plochy:

(1) $4x^2 + y^2 - 4z^2 - 8x + 4y + 24z - 32 = 0$,
(2) $4x^2 - 9y^2 + 8x - 36y - 36z - 32 = 0$,
(3) $4x^2 - y^2 - 4z^2 - 8x - 4y + 24z - 36 = 0$,

Riešenie

Ľavé strany rovníc upravíme doplnením na štvorce.

(1)

$$\begin{aligned} 4x^2+y^2-4z^2-8x+4y+24z-32 &= 0 \\ 4(x-1)^2-4+(y+2)^2-4-4(z-3)^2+36-32 &= 0 \\ 4(x-1)^2+(y+2)^2-4(z-3)^2-4 &= 0 \\ (x-1)^2+\frac{(y+2)^2}{4}-(z-3)^2-1 &= 0 \end{aligned}$$

Je to rovnica jednodielneho hyperboloidu so stredom $S=(1,-2,3)$ a poloosami $a=1$, $b=2$, $c=1$. Jeho os, ktorá ho nepretína, je rovnobežná so súradnicovou osou o_z.

(2)

$$\begin{aligned} 4x^2-9y^2+8x-36y-36z-32 &= 0 \\ 4(x+1)^2-4-9(y+2)^2+36-36z-32 &= 0 \\ 4(x+1)^2-9(y+2)^2-36z &= 0 \\ \frac{(x+1)^2}{9}-\frac{(y+2)^2}{4}-z &= 0 \end{aligned}$$

Toto je rovnica hyperbolického paraboloidu. Jeho vrcholom je bod $V=(-1,-2,0)$ a jeho os je rovnobežná so súradnicovou osou o_z.

(3)

$$\begin{aligned} 4x^2-y^2-4z^2-8x-4y+24z-36 &= 0 \\ 4(x-1)^2-4-(y+2)^2+4-4(z-3)^2+36-36 &= 0 \\ 4(x-1)^2-(y+2)^2-4(z-3)^2 &= 0 \\ -4(x-1)^2+(y+2)^2+4(z-3)^2 &= 0 \\ -(x-1)^2+\frac{(y+2)^2}{4}+(z-3)^2 &= 0 \end{aligned}$$

Je to rovnica eliptickej kužeľovej plochy s vrcholom $V=(1,-2,3)$ a osou rovnobežnou so súradnicovou osou o_x.

■

Cvičenie 3. (1) Určte typ a ďalšie základné charakteristiky kvadratickej plochy:

(a) $2x^2+2y^2+2z^2-4x+4y+8z+9=0$, [$(x-1)^2+(y+1)^2+(z+2)^2=\frac{3}{2}$ guľová plocha, stred: $S=(1,-1,-2)$, polomer: $\sqrt{\frac{3}{2}}$]

(b) $-x^2+y^2-4z^2-4x-2y-8z-7=0$, [$(x+2)^2-(y-1)^2+\frac{(z+1)^2}{\frac{1}{4}}=0$ eliptická kužeľová plocha, vrchol: $V=(-2,1,-1)$, os rovnobežná s o_y]

(c) $4x^2-2y^2+z^2+8x+4y+6z+7=0$, [$(x+1)^2-\frac{(y-1)^2}{2}+\frac{(z+3)^2}{4}-1=0$ jednodielny hyperboloid, stred: $S=(-1,1,-3)$, os, ktorá ho nepretína, je rovnobežná s o_y]

(d) $9y^2-4z^2+18y-16z-43=0$, [$\frac{(y+1)^2}{4}-\frac{(z+2)^2}{9}-1=0$ hyperbolická valcová plocha, os: $x=t, y=-1, z=-2$]

(e) $4x^2+9y^2+z^2+16x-18y-4z+28=0$, [$\frac{(x+2)^2}{\frac{1}{4}}+\frac{(y-1)^2}{\frac{1}{9}}+(z-2)^2-1=0$ elipsoid, stred: $S=(-2,1,2)$, poloosi: $a=\frac{1}{2}, b=\frac{1}{3}, c=1$]

(f) $x^2 + 4z^2 + 2x + 8y - 8z + 9 = 0$, $\left[\begin{array}{l} \frac{(x+1)^2}{4} + (z-1)^2 + 2(y+2) = 0 \\ \text{eliptický paraboloid, vrchol: } V = (-1,-2,1) \\ \text{os: } x = -1, y = -2+t, z = 1 \end{array}\right]$

(g) $2x^2 - y^2 + 12x + 4z + 14 = 0$, $\left[\begin{array}{l} (x+3)^2 - \frac{y^2}{2} + 2(z-1) = 0 \\ \text{hyperbolický paraboloid, vrchol: } V = (-3,0,1) \\ \text{os: } x = -3, y = 0, z = 1+t \end{array}\right]$

(h) $4x^2 + y^2 - 4z^2 - 8x + 2y + 8z + 5 = 0$, $\left[\begin{array}{l} (x-1)^2 + \frac{(y+1)^2}{4} - (z-1)^2 + 1 = 0 \\ \text{dvojdielny hyperboloid,} \\ \text{stred: } S = (1,-1,1), \\ \text{os, ktorá ho pretína, je rovnobežná s } o_z \end{array}\right]$

(i) $y^2 + 4z^2 + 2y - 8z + 1 = 0$, $\left[\begin{array}{l} \frac{(y+1)^2}{4} + (z-1)^2 - 1 = 0 \\ \text{eliptická valcová plocha,} \\ \text{os: } x = t, y = -1, z = 1 \end{array}\right]$

(2) Čo je množina všetkých bodov v $\mathbf{E}_3$,

(a) ktorých podiel vzdialeností od bodu $F = (0,0,2)$ a roviny $z = 1$ sa rovná $\sqrt{2}$, [dvojdielny hyperboloid $x^2 + y^2 - z^2 + 2 = 0$]

(b) ktoré majú od bodu $F = (-a,0,0)$ a roviny $x = a$ rovnakú vzdialenosť, $\left[\begin{array}{l} \text{pre } a = 0 \text{ priamka } x = t, y = 0, z = 0 \\ \text{pre } a \neq 0 \text{ eliptický paraboloid } y^2 + z^2 + 4ax = 0 \end{array}\right]$

(c) ktorých absolútna hodnota rozdielu vzdialeností od bodov $F = (0,0,3)$, $G = (0,0,-3)$ sa rovná 4, [dvojdielny hyperboloid $4x^2 + 4y^2 - 5z^2 + 20 = 0$]