LINEÁRNA ALGEBRA

RNDr. Peter Kaprálik, PhD.
KM FEI STU, Ilkovičova 3, 812 19 Bratislava
8. 2. 2002

1. Aritmetické priestory $\mathbf{R}^n$ a $\mathbf{C}^n$

Definícia 1.1. *Karteziánskym súčinom* n neprázdnych množín $M_1, M_2, \dots, M_n$ nazývame množinu

$$M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n);\ x_1 \in M_1, x_2 \in M_2, \dots, x_n \in M_n\}$$

Jej prvky nazývame *usporiadané* n*-tice* (stručne n-tice). Ak $M_1 = M_2 = \cdots = M_n = M$, tak karteziánsky súčin množín $M_1, M_2, \dots, M_n$ označujeme M^n.

Dve n-tice $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ sú rovnaké, ak $x_1 = y_1, x_2 = y_2, \dots, x_n = y_n$.

Usporiadanú n-ticu $\overline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ komplexných čísel (komplexnú n-ticu) nazývame tiež n*-členným aritmetickým vektorom* krátko len *vektorom*. Čísla $x_1, x_2, \dots, x_n$ nazývame *zložkami* (*súradnicami*) vektora $\overline{x}$. Na množine $\mathbf{C}^n$ definujeme operáciu súčtu dvoch n-tíc, ktorú budeme označovať $+$, a súčinu komplexného čísla a n-tice, ktorý budeme označovať $\cdot$.

Definícia 1.2. Pre každé $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{C}^n$, $(y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbf{C}^n$, $\alpha \in \mathbf{C}$ definujeme

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$

$$\alpha \cdot (x_1, x_2, \dots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n)$$

Poznámka 1.1. Ak v predchádzajúcej definícii nahradíme množinu $\mathbf{C}$ množinou $\mathbf{R}$ a množinu $\mathbf{C}^n$ množinou $\mathbf{R}^n$, dostaneme definíciu súčtu reálnych n-tíc a súčinu reálneho čísla a reálnej n-tice.

Množinu $\mathbf{C}^n$ resp. $\mathbf{R}^n$ s vyššie definovanými operáciami súčtu vektorov a súčinu čísla a vektora nazývame *aritmetickým priestorom.*

Ďalšie vlastnosti budeme formulovať len pre aritmetický priestor $\mathbf{C}^n$. Analogické vlastnosti má aj aritmetický priestor $\mathbf{R}^n$.

Budeme používať nasledujúce označenia a názvy:

$\overline{0} = (0, 0, \dots, 0)$ – *nulový vektor* (*nulová* n*-tica*)

$-\overline{x} = (-1) \cdot \overline{x}$ – *opačný vektor* (*opačná* n*-tica*) k vektoru (n*-tici*) $\overline{x}$

$\overline{y} - \overline{x} = \overline{y} + (-\overline{x})$

Veta 1.1. Pre každé $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z} \in \mathbf{C}^n$ a $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$ platí

(1) $\overline{x} + \overline{y} = \overline{y} + \overline{x}$ komutatívny zákon
(2) $(\overline{x} + \overline{y}) + \overline{z} = \overline{x} + (\overline{y} + \overline{z})$ asociatívny zákon
(3) $\overline{x} + \overline{0} = \overline{x}$
(4) $\overline{x} + (-\overline{x}) = \overline{0}$
(5) $1 \cdot \overline{x} = \overline{x}$
(6) $(\alpha\beta) \cdot \overline{x} = \alpha \cdot (\beta \cdot \overline{x})$
(7) $\alpha \cdot (\overline{x} + \overline{y}) = \alpha \cdot \overline{x} + \beta \cdot \overline{y}$
(8) $(\alpha + \beta) \cdot \overline{x} = \alpha \cdot \overline{x} + \beta \cdot \overline{x}$
(9) $\alpha \cdot \overline{x} = \overline{0}$ práve vtedy, keď $\alpha = 0$ alebo $\overline{x} = \overline{0}$

Dôkaz

Nech $\overline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\overline{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, $\overline{z} = (z_1, z_2, \dots, z_n)$, potom

(1) $\overline{x}+\overline{y}=(x_1,x_2,\dots,x_n)+(y_1,y_2,\dots,y_n)=(x_1+y_1,x_2+y_2,\dots,x_n+y_n)=$
$=(y_1+x_1,y_2+x_2,\dots,y_n+x_n)=(y_1,y_2,\dots,y_n)+(x_1,x_2,\dots,x_n)=\overline{y}+\overline{x}$

(2) $(\overline{x}+\overline{y})+\overline{z}=(x_1+y_1,x_2+y_2,\dots,x_n+y_n)+(z_1,z_2,\dots,z_n)=$
$=(x_1+y_1+z_1,x_2+y_2+z_2,\dots,x_n+y_n+z_n)=$
$=(x_1,x_2,\dots,x_n)+(y_1+z_1,y_2+z_2,\dots,y_n+z_n)=\overline{x}+(\overline{y}+\overline{z})$

(3) $\overline{x}+\overline{0}=(x_1,x_2,\dots,x_n)+(0,0,\dots,0)=(x_1+0,x_2+0,\dots,x_n+0)=$
$=(x_1,x_2,\dots,x_n)=\overline{x}$

(4) $\overline{x}+(-\overline{x})=(x_1,x_2,\dots,x_n)+(-x_1,-x_2,\dots,-x_n)=(x_1-x_1,x_2-x_2,\dots,x_n-x_n)=$
$=(0,0,\dots,0)=\overline{0}$

(5) $1\cdot\overline{x}=(1\cdot x_1,1\cdot x_2,\dots,1\cdot x_n)=(x_1,x_2,\dots,x_n)=\overline{x}$

(6) $(\alpha\beta)\cdot\overline{x}=(\alpha\beta x_1,\alpha\beta x_2,\dots,\alpha\beta x_n)=\alpha(\beta x_1,\beta x_2,\dots,\beta x_n)=$
$=\alpha[\beta(x_1,x_2,\dots,x_n)]=\alpha\cdot(\beta\cdot\overline{x})$

(7) $\alpha\cdot(\overline{x}+\overline{y})=\alpha(x_1+y_1,x_2+y_2,\dots,x_n+y_n)=(\alpha x_1+\alpha y_1,\alpha x_2+\alpha y_2,\dots,\alpha x_n+\alpha y_n)=$
$=(\alpha x_1,\alpha x_2,\dots,\alpha x_n)+(\alpha y_1,\alpha y_2,\dots,\alpha y_n)=\alpha\cdot\overline{x}+\beta\cdot\overline{y}$

(8) $\alpha\cdot\overline{x}=(\alpha x_1,\alpha x_2,\dots,\alpha x_n)$ je nulová n-tica práve vtedy, keď $\alpha x_1=0,\alpha x_2=0,\dots,$ $\alpha x_n=0$, čo nastane práve vtedy, keď $\alpha=0$ alebo $x_1=x_2=\cdots=x_n=0$ t.j. $\alpha=0$ alebo $\overline{x}=\overline{0}$.

□

Poznámka 1.2. Podobne, ako pri súčine reálnych čísel namiesto $a\cdot b$ píšeme často ab, aj tu budeme obvykle písať $\alpha\overline{x}$, namiesto $\alpha\cdot\overline{x}$.

Definícia 1.3. Nech $\overline{x}_1,\overline{x}_2,\dots,\overline{x}_k\in\mathbf{C}^n$, $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_k\in\mathbf{C}$. Vektor

$$\overline{x}=\alpha_1\overline{x}_1+\alpha_2\overline{x}_2+\cdots+\alpha_k\overline{x}_k$$

sa nazýva *lineárna kombinácia* vektorov $\overline{x}_1,\overline{x}_2,\dots,\overline{x}_k$. Čísla $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_k$ sa nazývajú koeficienty lineárnej kombinácie týchto vektorov.

Príklad 1.1.

$$2(1,-1,1)+0(1,2,1)-3(0,1,1)$$

je lineárnou kombináciou trojíc $(1,-1,1)$, $(1,2,1)$, $(0,1,1)$.

■

Definícia 1.4. Nech $M=\{\overline{x}_1,\overline{x}_2,\dots,\overline{x}_k\}\subset\mathbf{C}^n$. Množinu všetkých lineárnych kombinácií prvkov množiny M t.j.

$$\left\{\sum_{j=1}^{k}\alpha_j\overline{x}_j;\ \overline{x}_j\in M,\ \alpha_j\in\mathbf{C}\right\}$$

nazývame *lineárnym obalom* množiny M a označujeme $[[M]]$. Prvky množiny M sa nazývajú *generátory* lineárneho obalu.

Príklad 1.2. Určte lineárny obal množiny M, ak

(1) $M=\{(1,0),(0,1)\}\subset\mathbf{C}^2$
(2) $M=\{(1,0,0),(1,1,0),(0,1,0)\}\subset\mathbf{R}^3$

Riešenie

(1) $[[M]]=\{\alpha(1,0)+\beta(0,1);\ \alpha,\beta\in\mathbf{C}\}=\{(\alpha,\beta);\ \alpha,\beta\in\mathbf{C}\}=\mathbf{C}^2$
(2) $[[M]]=\{\alpha(1,0,0)+\beta(1,1,0)+\gamma(0,1,0);\ \alpha,\beta,\gamma\in\mathbf{R}\}=$
$=\{(\underbrace{\alpha+\beta}_{a},\underbrace{\beta+\gamma}_{b},0);\ \alpha,\beta,\gamma\in\mathbf{R}\}=\{(a,b,0);\ a,b\in\mathbf{R}\}$

■

Veta 1.2. Nech $M\subset\mathbf{C}^n$, $M'\subset\mathbf{C}^n$ sú konečné neprázdne množiny. Potom platí

(1) ak $M\subset M'$, tak $[[M]]\subset[[M']]$
(2) ak $\overline{x}\in[[M]]$, tak $[[M]]=[[M\cup\{\overline{x}\}]]$

Dôkaz

Nech $M = \{\overline{x}_1, \overline{x}_2, \dots, \overline{x}_k\}$.

(1) Keďže $M \subset M'$, sú n-tice $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \dots, \overline{x}_k$ a potom aj každá ich lineárna kombinácia prvkami množiny M'. To však znamená, že $[[M]] \subset [[M']]$.

(2) $M \subset M \cup \{\overline{x}\}$, preto podľa prvej časti vety $[[M]] \subset [[M \cup \{\overline{x}\}]]$. Dokážeme opačnú inklúziu $[[M \cup \{\overline{x}\}]] \subset [[M]]$. Stačí ukázať, že ľubovoľný prvok $\overline{y}$ množiny $[[M \cup \{\overline{x}\}]]$ je zároveň prvkom množiny $[[M]]$.

Vektor $\overline{x} \in [[M]]$ je lineárnou kombináciou prvkov množiny M, teda

$$\overline{x} = \alpha_1\overline{x}_1 + \alpha_2\overline{x}_2 + \cdots + \alpha_k\overline{x}_k$$

Vektor $\overline{y} \in [[M \cup \{\overline{x}\}]]$ je lineárnou kombináciou prvkov množiny $M \cup \{\overline{x}\}$, teda

$$\overline{y} = \beta_1\overline{x}_1 + \beta_2\overline{x}_2 + \cdots + \beta_k\overline{x}_k + \beta\overline{x}$$

Ak sem dosadíme vyjadrenie vektora $\overline{x}$ dostaneme

$$\overline{y} = \beta_1\overline{x}_1 + \beta_2\overline{x}_2 + \cdots + \beta_k\overline{x}_k + \beta(\alpha_1\overline{x}_1 + \alpha_2\overline{x}_2 + \cdots + \alpha_k\overline{x}_k)$$

po úprave

$$\overline{y} = (\beta_1 + \beta\alpha_1)\overline{x}_1 + (\beta_2 + \beta\alpha_2)\overline{x}_2 + \cdots + (\beta_k + \beta\alpha_k)\overline{x}_k$$

Vidíme, že vektor $\overline{y}$ je lineárnou kombináciou prvkov množiny M, preto $\overline{y} \in [[M]]$ a $[[M \cup \{\overline{x}\}]] \subset [[M]]$.

□

Definícia 1.5. Hovoríme, že n-tice $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \dots, \overline{x}_k \in \mathbf{C}^n$ sú *lineárne závislé*, ak existujú čísla $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbf{C}$, z ktorých aspoň jedno je rôzne od nuly tak, že platí

$$\alpha_1\overline{x}_1 + \alpha_2\overline{x}_2 + \cdots + \alpha_k\overline{x}_k = \overline{0}$$

Vektory $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \dots, \overline{x}_k$, ktoré nie sú lineárne závislé, sa nazývajú *lineárne nezávislé*.

Príklad 1.3. Ukážeme, že n-tice

$$(1,0,0,\dots,0,0), (0,1,0,\dots,0,0), \dots, (0,0,0,\dots,1,0), (0,0,0,\dots,0,1)$$

z $\mathbf{C}^n$ (resp. $\mathbf{R}^n$) sú lineárne nezávislé.

Riešenie

Zistime, pre aké čísla $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ je splnená rovnosť

$$\alpha_1(1,0,0,\dots,0,0) + \alpha_2(0,1,0,\dots,0,0) + \cdots + \alpha_n(0,0,0,\dots,0,1) = (0,0,0,\dots,0,0)$$

Úpravou dostaneme

$$\begin{aligned}(\alpha_1,0,0,\dots,0,0) + (0,\alpha_2,0,\dots,0,0) + \cdots + (0,0,0,\dots,0,\alpha_n) &= (0,0,0,\dots,0,0)\\ (\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n) &= (0,0,0,\dots,0,0)\end{aligned}$$

odkiaľ $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$, čo znamená, že dané n-tice sú lineárne nezávislé.

■

Príklad 1.4. Zistite, či sú trojice $(1,0,0), (0,1,1), (1,1,1)$ lineárne závislé alebo nezávislé.

Riešenie

Zistíme, pre aké koeficienty $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ je lineárna kombinácia daných trojíc nulová.

$$\begin{aligned}\alpha(1,0,0) + \beta(0,1,1) + \gamma(1,1,1) &= (0,0,0)\\ (\alpha,0,0) + (0,\beta,\beta) + (\gamma,\gamma,\gamma) &= (0,0,0)\\ (\alpha+\gamma, \beta+\gamma, \beta+\gamma) &= (0,0,0)\end{aligned}$$

odkiaľ

$$\begin{aligned}\alpha + \gamma &= 0\\ \beta + \gamma &= 0\end{aligned}$$

Tejto sústave rovníc vyhovujú napr. čísla $\alpha = 1,\ \beta = 1,\ \gamma = -1$. Sú nenulové (stačilo, aby bolo nenulové jedno z nich), preto dané trojice sú lineárne závislé.

■

Poznámka 1.3. Lineárnu nezávislosť n-tíc, môžeme charakterizovať, podobne ako lineárnu závislosť, pomocou lineárnej kombinácie n-tíc. Stačí definíciu linárnej závislosti negovať a dostaneme:

Hovoríme, že n-tice $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \dots, \overline{x}_k \in \mathbf{C}^n$ sú *lineárne nezávislé*, ak pre všetky $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbf{C}$ z rovnosti

$$\alpha_1\overline{x}_1 + \alpha_2\overline{x}_2 + \cdots + \alpha_k\overline{x}_k = \overline{0}$$

vyplýva

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0$$

Veta 1.3. Nech pre n-tice $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \dots, \overline{x}_k$ platí aspoň jedna z podmienok:

(1) existuje $j \in \{1, \dots, k\}$ tak, že $\overline{x}_j = \overline{0}$
(2) existujú $r, s \in \{1, \dots, k\},\ r < s$ tak, že $\overline{x}_r = \overline{x}_s$

Potom n-tice $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \dots, \overline{x}_k$ sú lineárne závislé.

Dôkaz

(1) Evidentne platí

$$0\,\overline{x}_1 + \cdots + 0\,\overline{x}_{j-1} + 1\,\overline{x}_j + 0\,\overline{x}_{j+1} + \cdots + 0\,\overline{x}_k = \overline{0}$$

Aspoň jeden z koeficientov lineárnej kombinácie je nenulový, preto sú dané vektory lineárne závislé.

(2) V tomto prípade zas platí

$$0\,\overline{x}_1 + \cdots + 0\,\overline{x}_{r-1} + 1\,\overline{x}_r + 0\,\overline{x}_{r+1} + \cdots + 0\,\overline{x}_{s-1} - 1\,\overline{x}_s + 0\,\overline{x}_{s+1} + \cdots + 0\,\overline{x}_k = \overline{0}$$

a keďže aspoň jeden z koeficientov je rôzny od nuly, dané n-tice sú lineárne závislé.

□

Veta 1.4. Vektor $\overline{x} \in \mathbf{C}^n$ je lineárne závislý práve vtedy, keď $\overline{x} = \overline{0}$.

Dôkaz

Vektor $\overline{x}$ je linárne závislý práve vtedy, keď existuje $\alpha \in \mathbf{C},\ \alpha \neq 0$ tak, že platí $\alpha\overline{x} = \overline{0}$. Keďže $\alpha \neq 0$, je táto rovnosť splnená len pre $\overline{x} = \overline{0}$.

□

Veta 1.5. Vektory $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \dots, \overline{x}_k$ pre $k \geq 2$ sú lineárne závislé práve vtedy, keď jeden z nich je linárnou kombináciou ostatných.

Dôkaz

Nech sú vektory $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \dots, \overline{x}_k$ lineárne závislé. Potom existujú čísla $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$, z ktorých aspoň jedno je rôzne od nuly tak, že

$$\alpha_1\overline{x}_1 + \alpha_2\overline{x}_2 + \cdots + \alpha_k\overline{x}_k = \overline{0}$$

Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že $\alpha_1 \neq 0$. Potom existuje $\alpha_1^{-1} = \frac{1}{\alpha_1}$ a z predchádzajúcej rovnosti môžeme vyjadriť vektor $\overline{x}_1$

$$\alpha_1\overline{x}_1 = -\alpha_2\overline{x}_2 - \cdots - \alpha_k\overline{x}_k \quad /\cdot\alpha_1^{-1}$$

$$\overline{x}_1 = -\alpha_1^{-1}\alpha_2\overline{x}_2 - \cdots - \alpha_1^{-1}\alpha_k\overline{x}_k$$

Teraz dokážeme opačnú implikáciu. Nech jeden z vektorov je lineárnou kombináciou ostatných. Môžeme predpokladať, že je to $\overline{x}_1$, keby to bol iný, postupovali by sme podobne. Teda

$$\overline{x}_1 = \beta_2\overline{x}_2 + \cdots + \beta_k\overline{x}_k$$

čo môžeme upraviť na

$$1\,\overline{x}_1 - \beta_2\overline{x}_2 - \cdots - \beta_k\overline{x}_k = \overline{0}$$

Z toho na základe definície vyplýva, že vektory $\overline{x}_1,\ \overline{x}_2,\ \dots,\ \overline{x}_k$ sú lineárne závislé.

□

Veta 1.6. Nech n-tice $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \dots, \overline{x}_k$ $(k \geq 1)$ sú lineárne závislé a nech $\overline{x}_{k+1}, \overline{x}_{k+2}, \dots, \overline{x}_m$ $(m \geq k+1)$ sú ľubovoľné n-tice. Potom n-tice $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \dots, \overline{x}_k, \overline{x}_{k+1}, \dots, \overline{x}_m$ sú lineárne závislé.

Dôkaz

Z predpokladov vety vyplýva, že existujú čísla $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$, z ktorých aspoň jedno je rôzne od nuly, tak, že $\alpha_1\overline{x}_1 + \alpha_2\overline{x}_2 + \dots + \alpha_k\overline{x}_k = \overline{0}$. Položme $\alpha_{k+1} = \dots = \alpha_m = 0$. Potom

$$\alpha_1\overline{x}_1 + \alpha_2\overline{x}_2 + \dots + \alpha_k\overline{x}_k + \alpha_{k+1}\overline{x}_{k+1} + \dots + \alpha_m\overline{x}_m = \alpha_1\overline{x}_1 + \alpha_2\overline{x}_2 + \dots + \alpha_k\overline{x}_k = \overline{0}$$

kde aspoň jedno z čísel $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ je nenulové.

□

Veta 1.7. Ak sú n-tice $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \dots, \overline{x}_m$ lineárne nezávislé. tak sú lineárne nezávislé aj n-tice $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \dots, \overline{x}_k$ $(k \leq m)$.

Dôkaz (sporom)

Keby boli $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \dots, \overline{x}_k$ lineárne závislé, potom podľa predošlej vety by boli aj $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \dots, \overline{x}_m$ lineárne závislé, čo je spor s predpokladom vety.

□

Cvičenie 1.

(1) Zistite, či vektor $\overline{x} = (7, 2, -2)$ je prvkom lineárneho obalu množiny vektorov
   (a) $\{(1, 0, -1), (2, 1, 0)\}$ [nie]
   (b) $\{(2, 1, -1), (1, 0, 0)\}$ [áno]
   (c) $\{(1, 0, 1), (1, -1, 0), (1, 1, 5)\}$ [áno]

(2) Zistite, či sú lineárne závislé alebo nezávislé vektory
   (a) $(2, -1, 0, 1), (1, 2, 0, -2)$ [lin. nezávislé]
   (b) $(1, 0, 1), (1, -1, 0), (1, 1, 5)$ [lin. nezávislé]
   (c) $(2, -1, 0, 1), (-4, 2, 0, -2)$ [lin. závislé]
   (d) $(1, 0, 1), (1, -1, 0), (1, 2, 3)$ [lin. závislé]

(3) Nech aritmetické vektory $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}$ sú lineárne nezávislé. Zistite, či sú lineárne závislé alebo nezávislé vektory
   (a) $\overline{x} - \overline{y}, \overline{x} + \overline{y}$ [lin. nezávislé]
   (b) $\overline{x} - \overline{y}, \overline{y} - \overline{z}, \overline{x} - \overline{z}$ [lin. závislé]