2 Lineárne zobrazenia

Poznámka. Pojmy „lineárne zobrazenie“ a „lineárny operátor“ sa považujú za ekvivalentné. LP znamená lineárny priestor.

2.1 Riešené úlohy

1. Nech L je lineárny priestor, $\overline{a} \in L$ je pevne zvolený vektor. Zistite, či zobrazenie $\varphi : L \to L$ je lineárne, ak

   (a) $\varphi(\overline{x}) = \overline{x} + \overline{a}$,

   (b) $\varphi(\overline{x}) = \overline{a}$.

   Riešenie. Ak $\varphi : L \to L$ je lineárne zobrazenie, tak

   $$\varphi(\overline{0}) = \varphi(\overline{0} + \overline{0}) = \varphi(\overline{0}) + \varphi(\overline{0})$$

   z čoho vyplýva $\varphi(\overline{0}) = \overline{0}$. Preto zobrazenie φ v prípadoch (a), (b) nie je lineárne pre $\overline{a} \neq \overline{0}$.

   Nech teraz $\overline{a} = \overline{0}$. Potom pre každé $\overline{x}, \overline{y} \in L$ a pre každý skalár α platí:

   (a) $\varphi(\overline{x} + \overline{y}) = \overline{x} + \overline{y}, \ \varphi(\alpha\overline{x}) = \alpha\overline{x} = \alpha\varphi(\overline{x})$,

   (b) $\varphi(\overline{x} + \overline{y}) = \overline{0}, \ \varphi(\alpha\overline{x}) = \overline{0} = \alpha\varphi(\overline{x})$,

   preto pre $\overline{a} = \overline{0}$ je zobrazenie φ lineárne v oboch prípadoch.

2. Zistite, či zobrazenie $\varphi : \mathrm{P}(\boldsymbol{R}) \to \boldsymbol{R}^2, \ \varphi(g(x)) = (g(1), g'(-1))$ je lineárne.

   Riešenie. Zobrazenie φ je lineárne, lebo pre každé polynómy g, h a každé $\alpha, \beta \in \boldsymbol{R}$ platí:

   $$\begin{aligned} \varphi((g+h)(x)) &= ((g+h)(1), (g+h)'(-1)) = (g(1) + h(1), g'(-1) + h'(-1)) = \\ &= (g(1), g'(-1)) + (h(1), h'(-1)) = \varphi(g(x)) + \varphi(h(x)) \end{aligned}$$

3. Zistite, či zobrazenie $f : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^2$ je lineárne, ak

   (a) $f(x_1, x_2, x_3) = (1 + x_1, x_2)$,

   (b) $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_1 - x_3)$,

   (c) $f(x_1, x_2, x_3) = (1, 2)$,

   (d) $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2, -2x_2)$.

   Riešenie. V prípadoch (a), (c) nie je obrazom nulového vektora nulový vektor, a teda zobrazenie f nie je lineárne. Ukážeme, že f nie je lineárne ani v prípade (d). Nech $\alpha = -1$, $\overline{x} = (1, 0, 0)$. Potom

   $$f(\alpha\overline{x}) = f(-1, 0, 0) = (1, 0)$$

$$\alpha f(\overline{x}) = -f(1,0,0) = -(1,0) = (-1,0) \neq f(\alpha\overline{x})$$

Zobrazenie f v prípade (b) je lineárne, pretože pre ľubovoľné $\overline{x}, \overline{y} \in \boldsymbol{R}^3$ a pre ľubovoľné $\alpha \in \boldsymbol{R}$ platí:

$$f(\overline{x}+\overline{y}) = f(x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3) = (x_1+y_1+x_2+y_2, x_1+y_1-(x_3+y_3)) =$$

$$= (x_1+x_2, x_1-x_3) + (y_1+y_2, y_1-y_3) = f(\overline{x}) + f(\overline{y}),$$

$$f(\alpha\overline{x}) = f(\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3) = (\alpha x_1 + \alpha x_2, \alpha x_1 - \alpha x_3) = \alpha(x_1+x_2, x_1-x_3) = \alpha f(\overline{x}).$$

4. Nech $\mathcal{B} = \{\overline{b}_1, \overline{b}_2, \overline{b}_3, \overline{b}_4\}$, $\mathcal{D} = \{\overline{d}_1, \overline{d}_2, \overline{d}_3\}$ sú usporiadané bázy lineárnych priestorov L a M. Lineárne zobrazenie $f : L \to M$ je dané obrazmi prvkov bázy $\mathcal{B}$:

   $$f(\overline{b}_1) = \overline{d}_1 + \overline{d}_2 + \overline{d}_3,\ f(\overline{b}_2) = -2\overline{d}_2 + 3\overline{d}_3,\ f(\overline{b}_3) = -\overline{d}_1 + 3\overline{d}_2 - 2\overline{d}_3,\ f(\overline{b}_4) = \overline{d}_1 + 2\overline{d}_2$$

   Vypočítajte $f(\overline{x})$, ak $\overline{x} = -2\overline{b}_1 + \overline{b}_2 - \overline{b}_3 + 3\overline{b}_4$.

   Riešenie.

   $$\begin{aligned} f(\overline{x}) &= f(-2\overline{b}_1 + \overline{b}_2 - \overline{b}_3 + 3\overline{b}_4) = -2f(\overline{b}_1) + f(\overline{b}_2) - f(\overline{b}_3) + 3f(\overline{b}_4) = \\ &= -2(\overline{d}_1 + \overline{d}_2 + \overline{d}_3) + (-2\overline{d}_2 + 3\overline{d}_3) - (-\overline{d}_1 + 3\overline{d}_2 - 2\overline{d}_3) + 3(\overline{d}_1 + 2\overline{d}_2) = \\ &= 2\overline{d}_1 - \overline{d}_2 + 3\overline{d}_3 \end{aligned}$$

5. Určte maticu lineárneho zobrazenia

   $$\varphi : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^2,\ \varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 - 3x_3, 2x_1)$$

   vzhľadom k usporiadaným bázam $\mathcal{B}, \mathcal{D}$, ak

   (a) $\mathcal{B} = ((1,0,0), (0,1,0), (0,0,1))$, $\mathcal{D} = ((1,0), (0,1))$,

   (b) $\mathcal{B} = ((1,2,0), (-2,1,0), (3,1,-1))$, $\mathcal{D} = ((2,1), (0,2))$.

   Nájdite obraz vektora $\overline{x}$ v zobrazení φ, ak $\overline{x}_{\mathcal{B}} = (0,-4,1)^T$.

   Riešenie. (a) Určíme obrazy vektorov bázy $\mathcal{B}$ v zobrazení φ:

   $\varphi(1,0,0) = (1,2)$,

   $\varphi(0,1,0) = (2,0)$,

   $\varphi(0,0,1) = (-3,0)$.

   Keďže $\mathcal{D}$ je štandardná báza, pre súradnice týchto vektorov v báze $\mathcal{D}$ platí:

   $$(1,2)_{\mathcal{D}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ (2,0)_{\mathcal{D}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix},\ (-3,0)_{\mathcal{D}} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

   Potom

   $$\mathbf{M}_{\mathcal{D}}^{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1, & 2, & -3 \\ 2, & 0, & 0 \end{pmatrix}.$$

Pretože $\mathcal{B}$ je štandardná báza, $\overline{x} = (0, -4, 1)$ a priamo z predpisu zobrazenia φ dostávame

$$\varphi(\overline{x}) = (-11, 0).$$

(b) Postupujeme analogicky ako v (a).

$\varphi(1, 2, 0) = (5, 2)$,

$\varphi(-2, 1, 0) = (0, -4)$,

$\varphi(3, 1, -1) = (8, 6)$.

Teraz vyjadríme vypočítané vektory ako lineárnu kombináciu prvkov bázy $\mathcal{D}$:

$$(5, 2) = \alpha(2, 1) + \beta(0, 2)$$

Porovnaním zložiek dostávame sústavu rovníc

$$\begin{aligned} 2\alpha &= 5 \\ \alpha + 2\beta &= 2 \end{aligned}$$

ktorej riešením je $(\alpha, \beta) = (\frac{5}{2},\ \frac{1}{4})$. Teda $(5, 2)_{\mathcal{D}} = (\frac{5}{2},\ \frac{1}{4})^T$. Analogicky vypočítame súradnice zvyšných dvoch vektorov:

$$(0, -4)_{\mathcal{D}} = (0, -2)^T,\ (8, 6)_{\mathcal{D}} = (4, 1)^T.$$

Potom

$$\mathbf{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{D}}(\varphi) = \begin{pmatrix} \frac{5}{2}, & 0, & 4 \\ -\frac{1}{4}, & -2, & 1 \end{pmatrix}.$$

Pre súradnice obrazu vektora $\overline{x}$ potom platí

$$\varphi(\overline{x})_{\mathcal{D}} = \mathbf{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{D}}(\varphi) \cdot \overline{x}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2}, & 0, & 4 \\ -\frac{1}{4}, & -2, & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix}$$

čo znamená, že

$$\varphi(\overline{x}) = 4(2, 1) + 9(0, 2) = (8, 22).$$

6. Určte predpis lineárneho zobrazenia $\varphi : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^4$, ktoré je dané obrazmi prvkov bázy $\mathcal{B} = ((1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1))$:

$$\varphi(1, 0, 1) = (1, 0, 1, 0),\ \varphi(1, 1, 0) = (1, 1, 1, 1),\ \varphi(0, 1, 1) = (0, 1, 0, 1).$$

Riešenie. Zvoľme v LP $\boldsymbol{R}^4$ štandardnú bázu $\mathcal{D} = ((1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1))$. Potom

$$\mathbf{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{D}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1, & 1, & 0 \\ 0, & 1, & 1 \\ 1, & 1, & 0 \\ 0, & 1, & 1 \end{pmatrix}$$

a pre súradnice obrazu vektora $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3)$ v báze $\mathcal{D}$ platí

$$\varphi(\overline{x})_{\mathcal{D}} = \mathbf{M}_{\mathcal{D}}^{\mathcal{B}}(\varphi) \cdot \overline{x}_{\mathcal{B}}$$

Potrebujeme vypočítať súradnice vektora $\overline{x}$ v báze $\mathcal{B}$:

$$(x_1, x_2, x_3) = \alpha(1,0,1) + \beta(1,1,0) + \gamma(0,1,1)$$

odkiaľ

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= x_1 \\ \beta + \gamma &= x_2 \\ \alpha + \gamma &= x_3 \end{aligned}$$

Riešením tejto sústavy je $(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{1}{2}(x_1 - x_2 + x_3, x_1 + x_2 - x_3, -x_1 + x_2 + x_3)$ a teda

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2}(x_1 - x_2 + x_3, x_1 + x_2 - x_3, -x_1 + x_2 + x_3)^T.$$

Teraz už môžeme vypočítať $\varphi(\overline{x})_{\mathcal{D}}$:

$$\varphi(\overline{x})_{\mathcal{D}} = \begin{pmatrix} 1, & 1, & 0 \\ 0, & 1, & 1 \\ 1, & 1, & 0 \\ 0, & 1, & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{x_1 - x_2 + x_3}{2} \\ \frac{x_1 + x_2 - x_3}{2} \\ \frac{-x_1 + x_2 + x_3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Báza $\mathcal{D}$ je štandardná, preto

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_1, x_2).$$

7. Zistite, či lineárne zobrazenie $f : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^3$, $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_1 + x_2, x_2 - x_3)$ je izomorfizmus lineárnych priestorov. Ak je, určte f^{-1}.

   Riešenie. Nájdeme maticu lineárneho zobrazenia f vzhľadom k štandardnej báze $\mathcal{B}$ v $\boldsymbol{R}^3$.

   $$f(1,0,0) = (1,1,0), \;\; f(0,1,0) = (0,1,1), \;\; f(0,0,1) = (0,0,-1)$$

   Potom

   $$\mathbf{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 1, & 1, & 0 \\ 0, & 1, & -1 \end{pmatrix}$$

   Pretože matica $\mathbf{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ je regulárna (jej determinant je -1), je zobrazenie f izomorfizmus. Inverzné zobrazenie k f teda existuje a pre jeho maticu platí $\mathbf{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f^{-1}) = \left(\mathbf{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)\right)^{-1}$. Vypočítajme ju.

   $$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1, & 0, & 0 & 1, & 0, & 0 \\ 1, & 1, & 0 & 0, & 1, & 0 \\ 0, & 1, & -1 & 0, & 0, & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1, & 0, & 0 & 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 & -1, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 & -1, & 1, & -1 \end{array}\right)$$

$$\mathbf{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f^{-1}) = \begin{pmatrix} 1, & 0, & 0 \\ -1, & 1, & 0 \\ -1, & 1, & -1 \end{pmatrix}$$

Teraz už ľahko vypočítame $f^{-1}(x_1, x_2, x_3)$:

$$\begin{aligned} (f^{-1}(x_1,x_2,x_3))_{\mathcal{B}} &= \mathbf{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f^{-1}) \cdot (x_1,x_2,x_3)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1, & 0, & 0 \\ -1, & 1, & 0 \\ -1, & 1, & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_1 + x_2 \\ -x_1 + x_2 - x_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

odkiaľ

$$f^{-1}(x_1,x_2,x_3) = (x_1, -x_1 + x_2, -x_1 + x_2 - x_3.)$$

8. Dané sú lineárne zobrazenia $f, g : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^3$, $f(x_1,x_2,x_3) = (2x_1+x_3, -x_2+x_3, x_2+x_3)$, $g(x_1,x_2,x_3) = (x_3, x_2, 2x_1)$. Vypočítajte maticu vzhľadom k štandardnej báze a predpis pre zobrazenie

   (a) $2f + g$,

   (b) $g \circ f$.

Riešenie. Z predpisov zobrazení f, g vypočítame obrazy prvkov štandardnej bázy $\mathcal{B} = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$:

$$f(1,0,0) = (2,0,0),\ f(0,1,0) = (0,-1,1),\ f(0,0,1) = (1,1,1),$$

$$g(1,0,0) = (0,0,2),\ g(0,1,0) = (0,1,0),\ g(0,0,1) = (1,0,0).$$

Teraz už ľahko vytvoríme matice zobrazení f, g:

$$\mathbf{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2, & 0, & 1 \\ 0, & -1, & 1 \\ 0, & 1, & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} 0, & 0, & 1 \\ 0, & 1, & 0 \\ 2, & 0, & 0 \end{pmatrix}$$

Potom

$$\mathbf{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(2f+g) = 2\begin{pmatrix} 2, & 0, & 1 \\ 0, & -1, & 1 \\ 0, & 1, & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0, & 0, & 1 \\ 0, & 1, & 0 \\ 2, & 0, & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4, & 0, & 3 \\ 0, & -1, & 2 \\ 2, & 2, & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(g \circ f) = \begin{pmatrix} 0, & 0, & 1 \\ 0, & 1, & 0 \\ 2, & 0, & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2, & 0, & 1 \\ 0, & -1, & 1 \\ 0, & 1, & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0, & 1, & 1 \\ 0, & -1, & 1 \\ 4, & 0, & 2 \end{pmatrix}$$

z čoho dostaneme

$$\begin{aligned}(2f+g)(x_1,x_2,x_3) &= \left(\begin{pmatrix} 4, & 0, & 3 \\ 0, & -1, & 2 \\ 2, & 2, & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right)^T = \\ &= (4x_1+3x_3, -x_2+2x_3, 2x_1+2x_2+2x_3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(g\circ f)(x_1,x_2,x_3) &= \left(\begin{pmatrix} 0, & 1, & 1 \\ 0, & -1, & 1 \\ 4, & 0, & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right)^T = \\ &= (x_2+x_3, -x_2+x_3, 4x_1+2x_3).\end{aligned}$$

Poznámka. Hodnoty $(2f+g)(x_1,x_2,x_3)$, $(g\circ f)(x_1,x_2,x_3)$ je možné tiež určiť priamym výpočtom bez použitia matíc.

2.2 Cvičenia

1. Ukážte, že každý z nasledujúcich zobrazení je lineárny operátor na $\boldsymbol{R}^2$.
   (a) $\varphi(x_1,x_2)=(-x_1,x_2)$,
   (b) $\varphi(x_1,x_2)=(x_2,x_1)$,
   (c) $\varphi(x_1,x_2)=(0,x_2)$.
2. Zistite, či nasledujúce zobrazenia sú lineárne.
   (a) $\varphi(x_1,x_2)=(x_1\cos\alpha-x_2\sin\alpha, x_1\sin\alpha+x_2\cos\alpha)$, $\alpha\in\boldsymbol{R}$,
   (b) $\varphi(x_1,x_2)=(x_1+\alpha, x_2+\beta)$, $\alpha,\beta\in\boldsymbol{R}$.
3. Zistite, či nasledujúce zobrazenia sú lineárne zobrazenia z $\boldsymbol{R}^n$ do $\boldsymbol{R}^m$.
   (a) $\varphi(x_1,x_2)=(x_1,1+x_2)$,
   (b) $\varphi(x_1,x_2)=(x_1,x_2^2)$,
   (c) $\varphi(x_1,x_2)=(3x_1+x_2,2x_1-x_2)$,
   (d) $\varphi(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_2,x_1+x_2+x_3)$,
   (e) $\varphi(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_2,x_1+x_2+x_3,x_1x_2)$,
   (f) $\varphi(x_1,x_2,x_3)=((x_1-x_2)^2,x_1,x_3)$,
   (g) $\varphi(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_2,x_1+x_2+x_3,-x_1+3x_2+x_3)$
4. Zistite, či nasledujúce zobrazenia $T:\mathrm{P}_2(\boldsymbol{R})\to\mathrm{P}_2(\boldsymbol{R})$ sú lineárne.
   (a) $T(f(x))=f(-x)$,
   (b) $T(f(x))=3f'(x)+7f(x)$,
   (c) $T(f(x))=3f''(x)-f'(x)$,

(d) $T(f(x)) = f(x) + x^2$,

(e) $T(f(x)) = xf'(x)$.

5. Nech $\mathbf{I} \in \boldsymbol{R}^{n\times n}$ je jednotková matica. Zistite, či zobrazenia $\varphi : \boldsymbol{R}^{n\times n} \to \boldsymbol{R}^{n\times n}$ sú lineárne.

   (a) $\varphi(\mathbf{X}) = 5\mathbf{X}$,

   (b) $\varphi(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^T$,

   (c) $\varphi(\mathbf{X}) = \mathbf{X} + \mathbf{I}$,

   (d) $\varphi(\mathbf{X}) = \mathbf{X} + \mathbf{X}^T$,

6. Nech $\mathcal{B} = \{\overline{b}_1, \overline{b}_2, \overline{b}_3, \overline{b}_4\}$, $\mathcal{D} = \{\overline{d}_1, \overline{d}_2, \overline{d}_3\}$ sú usporiadané bázy lineárnych priestorov L a M. Lineárne zobrazenie $f : L \to M$ je dané obrazmi prvkov bázy $\mathcal{B}$:

   $f(\overline{b}_1) = \overline{d}_1 + \overline{d}_2 + \overline{d}_3,\ f(\overline{b}_2) = -2\overline{d}_1 + \overline{d}_3,\ f(\overline{b}_3) = 3\overline{d}_1 + 2\overline{d}_2 + \overline{d}_3,\ f(\overline{b}_4) = 4\overline{d}_1 + 3\overline{d}_2 + 2\overline{d}_3$

   Vypočítajte $f(\overline{x})$, ak

   (a) $\overline{x} = \overline{b}_1 + 3\overline{b}_2 - 2\overline{b}_3 - \overline{b}_4$,

   (b) $\overline{x} = 2\overline{b}_1 - \overline{b}_3 - 5\overline{b}_4$.

7. Pre každé z nasledujúcich lieárnych zobrazení $\varphi : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^2$ nájdite jeho maticu vzhľadom k štandardným bázam LP $\boldsymbol{R}^3$, $\boldsymbol{R}^2$.

   (a) $\varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 - x_3, x_1 - x_2)$,

   (b) $\varphi(x_1, x_2, x_3) = (0, x_1 + 3x_2)$,

   (c) $\varphi(x_1, x_2, x_3) = (-x_1, -x_2)$.

8. Pre každé z nasledujúcich lieárnych zobrazení $\varphi : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^3$ nájdite jeho maticu vzhľadom k štandardnej báze LP $\boldsymbol{R}^3$.

   (a) $\varphi(x_1, x_2, x_3) = (-x_3, x_1, x_2 + x_3)$,

   (b) $\varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 - x_3, x_1 - x_2 + x_3, -x_1 + x_2 + x_3)$,

   (c) $\varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_3, x_1 - x_2, x_2 + x_3)$.

9. Pre každé lineárne zobrazenie z cvičenia 7 nájdite jeho maticu vzhľadom k usporiadaným bázam $\mathcal{B} = \{((0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0)\}$ a $\mathcal{D} = \{(0, 1), (1, 1)\}$.

10. Pre každé lineárne zobrazenie z cvičenia 8 nájdite jeho maticu vzhľadom k usporiadanej báze $\mathcal{B} = \{((0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0)\}$.

11. Nájdite maticu lineárneho zobrazenia $S : \mathrm{P}_3(\boldsymbol{R}) \to \mathrm{P}_3(\boldsymbol{R})$, $S(p(x)) = 3p''(x) + 4p'(x) + p(x)$ vzhľadom k usporiadanej báze $\mathcal{P}$.

    (a) $\mathcal{P} = (1, x, x^2, x^3)$,

    (b) $\mathcal{P} = (1 + x, 1 - x, x^2 + x^3, x^2 - x^3)$.

12. Určte predpis lineárneho zobrazenia $\varphi : \mathbf{P}_2(\boldsymbol{R}) \to \mathbf{P}_4(\boldsymbol{R})$, pre ktoré platí

$$\varphi(1+x) = x + x^4,\ \varphi(1-x) = x^2 - x^4,\ \varphi(x - x^2) = x^3 - 1.$$

13. Nech matica lineárneho zobrazenia $f : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^3$ vzhľadom k báze $\mathcal{B} = ((1,0,1),(0,1,1),(1,1,0))$ je

$$\mathbf{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -1, & 0, & -1 \\ 0, & -1, & 0 \\ -1, & 1, & 0 \end{pmatrix}$$

Nájdite predpis zobrazenia f. Zistite, či f je izomorfizmus.

14. Zistite, či lineárne zobrazenie $f : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^3$, $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1+x_2, x_2+x_3, x_1+x_3)$ je izomorfizmus. Ak je, nájdite predpis pre inverzný izomorfizmus.

15. Nájdite lineárne zobrazenie $\varphi : \mathrm{P}_2(\boldsymbol{R}) \to \mathrm{P}_1(\boldsymbol{R})$, ktoré má vzhľadom k bázam $\mathcal{B}$, $\mathcal{D}$ maticu

$$\mathbf{M}_{\mathcal{D}}^{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1, & 0, & 2 \\ -1, & 1, & 0 \end{pmatrix}$$

ak

(a) $\mathcal{B}$, $\mathcal{D}$ sú štandardné bázy v $\mathrm{P}_2(\boldsymbol{R})$ a $\mathrm{P}_1(\boldsymbol{R})$,

(b) $\mathcal{B} = (1+x, 1-2x, x^2)$, $\mathcal{D} = (2-x, x)$.

16. Nech matica lineárneho zobrazenia $f : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^2$ vzhľadom k bázam $\mathcal{B} = ((1,0,1),(1,0,0),(1,1,1))$, $\mathcal{D} = ((-1,2),(1,1))$ je

$$\mathbf{M}_{\mathcal{D}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3 \\ 4, & 5, & 6 \end{pmatrix}$$

Určte obrazy vektorov $\overline{x} = (1,-2,3)$, $\overline{y} = (-1,0,4)$ v zobrazení f.

17. Dané sú lineárne zobrazenia $f : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^5$, $g : \boldsymbol{R}^5 \to \boldsymbol{R}^3$ svojimi maticami

$$\mathbf{M}(f) = \begin{pmatrix} 1, & 2, & -1 \\ 1, & 0, & 1 \\ 3, & 2, & 0 \\ -1, & 1, & 0 \\ -2, & 0, & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}(g) = \begin{pmatrix} -2, & 1, & 0, & 1, & 2 \\ 1, & 3, & 0, & 7, & 1 \\ 1, & 0, & 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}$$

vzhľadom k štandardným bázam v $\boldsymbol{R}^3$ a $\boldsymbol{R}^5$. Nájdite maticu a predpis zobrazenia $g \circ f : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^3$. V prípade, ak je $g \circ f$ izomorfizmus, nájdite k nemu inverzné zobrazenie.

2.3 Výsledky

2. (a) Áno. (b) φ je lineárne zobrazenie len pre $\alpha = \beta = 0$. **3.** (c),(d),(g) Áno. (a),(b),(e),(f) Nie. **4.** (a),(b),(c),(e) Áno. (d) Nie. **5.** (a),(b),(d) Áno. (c) Nie. **6.** (a) $-3\overline{d}_1 - 6\overline{d}_2$. (b) $-21\overline{d}_1 - 15\overline{d}_2 - 9\overline{d}_3$. **7.** (a) $\begin{pmatrix} 1, & 1, & -1 \\ 1, & -1, & 0 \end{pmatrix}$. (b) $\begin{pmatrix} 0, & 0, & 0 \\ 1, & 3, & 0 \end{pmatrix}$. (c) $\begin{pmatrix} -1, & 0, & 0 \\ 0, & -1, & 0 \end{pmatrix}$. **8.** (a) $\begin{pmatrix} 0, & 0, & -1 \\ 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 1 \end{pmatrix}$. (b) $\begin{pmatrix} 1, & 1, & -1 \\ 0, & -1, & 1 \\ -1, & 1, & 1 \end{pmatrix}$. (c) $\begin{pmatrix} 1, & 0, & -1 \\ 1, & -1, & 0 \\ 0, & 1, & 1 \end{pmatrix}$. **9.** (a) $\begin{pmatrix} -1, & 1, & -2 \\ 0, & 0, & 2 \end{pmatrix}$. (b) $\begin{pmatrix} 3, & 4, & 1 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}$. (c) $\begin{pmatrix} -1, & 1, & 0 \\ 0, & -1, & -1 \end{pmatrix}$. **10.** (a) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3, & 3, & 2 \\ 1, & -1, & 0 \\ -3, & -1, & 0 \end{pmatrix}$. (b) $\begin{pmatrix} 1, & 1, & -2 \\ 1, & -2, & 1 \\ -2, & 1, & 1 \end{pmatrix}$. (c) $\begin{pmatrix} 1, & 1, & 0 \\ 1, & 0, & 1 \\ -2, & 0, & 0 \end{pmatrix}$. **11.** (a) $\begin{pmatrix} 1, & 4, & 6, & 0 \\ 0, & 1, & 8, & 18 \\ 0, & 0, & 1, & 12 \\ 0, & 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}$. (b) $\begin{pmatrix} 3, & -2, & 16, & -2 \\ 2, & -1, & -10, & 8 \\ 0, & 0, & 7, & -6 \\ 0, & 0, & 6, & -5 \end{pmatrix}$. **12.** $\varphi(ax^2+bx+c) = (a+b)x^4 - ax^3 + \frac{c-a-b}{2}x^2 + \frac{a+b+c}{2}x + a$. **13.** $f(x_1, x_2, x_3) = (-2x_1 + x_2, x_2 - x_3, -x_3)$, f je izomorfizmus. **14.** f je izomorfizmus, $f^{-1}(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2}(x_1 - x_2 + x_3, x_1 + x_2 - x_3, -x_1 + x_2 + x_3)$. **15.** (a) $\varphi(a + bx + cx^2) = a + 2c + (-a + b)x$. (b) $\varphi(a + bx + cx^2) = \frac{1}{3}[4a + 2b + 12c + (-3a - 3b - 6c)x]$. **16.** $f(\overline{x}) = (3, -12)$, $f(\overline{y}) = (-3, -21)$. **17.** $\mathbf{M}(g \circ f) = \begin{pmatrix} -6, & -3, & 5 \\ -5, & 9, & 3 \\ -1, & 2, & 0 \end{pmatrix}$, $(g \circ f)(x, y, z) = (-6x - 3y + 5z, -5x + 9y + 3z, -x + 2y)$, $g \circ f$ je izomorfizmus, $(g \circ f)^{-1}(x, y, z) = \frac{1}{40}(-6x + 10y - 54z, -3x + 5y - 7z, -x + 15y - 69z)$.