

1 Lineárny priestor

1.1 Riešené úlohy

1. Na množine $\mathbf{R}^+$ je definovaná operácia sčítovania

$$a \oplus b = ab$$

a operácia násobenia reálnym skalárom

$$\alpha \odot a = a^\alpha.$$

Zistite, či $(\mathbf{R}^+, \oplus, \odot)$ je reálny lineárny priestor.

Riešenie. Overíme, či je splnených osem vlastností lineárneho priestoru:

Nech $a, b, c \in \mathbf{R}^+, \alpha, \beta \in \mathbf{R}$.

L1. $a \oplus b = b \oplus a$

L(L1) = $a \oplus b = ab = ba = b \oplus a = P(L1)$

L2. $a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c$

L(L2) = $a \oplus (b \oplus c) = a(bc) = (ab)c = (a \oplus b) \oplus c = P(L2)$

L3. Existuje $o \in \mathbf{R}^+$, že pre všetky $a \in \mathbf{R}^+$ $a \oplus o = a$

Zistíme, či nulový prvok o existuje. Počítajme

$$a \oplus o = a$$

$$ao = a / : a$$

$$o = 1 \in \mathbf{R}^+$$

Vidíme, že nulový prvok existuje a je ním číslo 1.

L4. Ku každému prvku $a \in \mathbf{R}^+$ existuje $a' \in \mathbf{R}^+$, že $a \oplus a' = o$

Počítajme:

$$a \oplus a' = o$$

$$aa' = 1 / : a$$

$$a' = \frac{1}{a} \in \mathbf{R}^+$$

L5. $1 \odot a = a$

L(L5) = $1 \odot a = a^1 = a = P(L5)$

L6. $\alpha \odot (\beta \odot a) = (\alpha\beta) \odot a$

L(L6) = $\alpha \odot a^\beta = (a^\beta)^\alpha = a^{\alpha\beta} = P(L6)$

L7. $\alpha \odot (a \oplus b) = (\alpha \odot a) \oplus (\alpha \odot b)$

L(L7) = $\alpha \odot (ab) = (ab)^\alpha$

P(L7) = $a^\alpha \oplus b^\alpha = a^\alpha b^\alpha = (ab)^\alpha = L(L7)$

$$\begin{aligned} \text{L8. } (\alpha + \beta) \odot a &= (\alpha \odot a) \oplus (\beta \odot a) \\ \text{L(L8)} &= a^{\alpha+\beta} = a^\alpha a^\beta = a^\alpha \oplus a^\beta = (\alpha \odot a) \oplus (\beta \odot a) = \text{P(L8)} \end{aligned}$$

Všetkých osem vlastností lineárneho priestoru je splnených, preto $(\mathbf{R}^+, \oplus, \odot)$ je reálny lineárny priestor.

2. Zistite, či $(\mathbf{R}^2, \oplus, \odot)$ je reálny lineárny priestor, ak

$$\begin{aligned} (x_1, x_2) \oplus (y_1, y_2) &= (x_1 + y_1, 0) \\ \alpha \odot (x_1, x_2) &= (\alpha x_1, \alpha x_2). \end{aligned}$$

Riešenie. Skontrolujme platnosť vlastností L1 až L8.

$$\begin{aligned} \text{L(L1)} &= (x_1, x_2) \oplus (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, 0) \\ \text{P(L1)} &= (y_1, y_2) \oplus (x_1, x_2) = (y_1 + x_1, 0) = (x_1 + y_1, 0) = \text{L(L1)} \\ \text{L(L2)} &= (x_1, x_2) \oplus ((y_1, y_2) \oplus (z_1, z_2)) = (x_1 + y_1 + z_1, 0) \\ \text{P(L2)} &= ((x_1, x_2) \oplus (y_1, y_2)) \oplus (z_1, z_2) = (x_1 + y_1 + z_1, 0) = \text{L(L2)} \end{aligned}$$

Pre nulový prvok (o_1, o_2) má platiť:

$$\begin{aligned} (x_1, x_2) \oplus (o_1, o_2) &= (x_1, x_2) \\ (x_1 + o_1, 0) &= (x_1, x_2) \\ x_1 + o_1 &= x_1, \quad 0 = x_2, \end{aligned}$$

čo napr. pre $(x_1, x_2) = (1, 1)$ nie je splnené, lebo $x_2 = 1 \neq 0$. Preto nulový prvok neexistuje a $(\mathbf{R}^2, \oplus, \odot)$ nie je lineárny priestor.

3. Zistite, či množina M všetkých reálnych polynómov stupňa 5 je podpriestorom lineárneho priestoru $\text{P}(\mathbf{R})$ všetkých reálnych polynómov.

Riešenie. Polynómy $x^5 - 2x^3 + 3$, $-x^5 + 4x$ patria do množiny M , ale ich súčet $-2x^3 + 4x + 3$ do množiny L nepatrí. To znamená, že M nie je podpriestor lineárneho priestoru $\text{P}(\mathbf{R})$.

4. Zistite, či množina M je podpriestorom lineárneho priestoru $\mathbf{R}^2$, ak

- a) $M = \{(x, y); x + 2y = 1\}$,
- b) $M = \{(x, y); 3x - 2y = 0\}$

Riešenie. Nech $(a, b), (c, d) \in M$, $\alpha \in \mathbf{R}$, potom

a) $a + 2b = 1$, $c + 2d = 1$. Prvok $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$ patrí do M , ak vyhovuje rovnici $x + 2y = 1$. Počítajme:

$$(a + c) + 2(b + d) = \underbrace{a + 2b}_{=1} + \underbrace{c + 2d}_{=1} = 1 + 1 = 2 \neq 1$$

z toho vyplýva $(a, b) + (c, d) \notin M$, teda M nie je podpriestorom $\mathbf{R}^2$.

b) $3a - 2b = 0$, $3c - 2d = 0$. Prvok $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$ patrí do M , ak vyhovuje rovnici $3x - 2y = 0$. Počítajme:

$$3(a + c) - 2(b + d) = \underbrace{3a - 2b}_{=0} + \underbrace{3c - 2d}_{=0} = 0 + 0 = 0.$$

To znamená, že $(a, b) + (c, d) \in M$. Prvok $\alpha(a, b) = (\alpha a, \alpha b)$ patrí do M , ak je riešením rovnice $3x - 2y = 0$. Overme, či to platí:

$$3(\alpha a) - 2(\alpha b) = \alpha(3a - 2b) = \alpha \cdot 0 = 0$$

teda $\alpha(a, b) \in M$. Zistili sme, že množina M je uzavretá vzhľadom na sčítovanie svojich prvkov a tiež vzhľadom na násobenie skalárom, preto M je podpriestorom LP $\mathbf{R}^2$.

5. $F\langle a, b \rangle$ je množina všetkých reálnych funkcií definovaných na intervale $\langle a, b \rangle$ (pozri cvičenie 3). Zistite, či množina

a) $M = \{g \in F\langle a, b \rangle; g(a) = k\},$

b) $M = \{g \in F\langle a, b \rangle; 2g(a) - 5g(b) = 0\}$

tvorí podpriestor LP $F\langle a, b \rangle$. Urobte diskusiu vzhľadom na parameter $k \in \mathbf{R}$.

Riešenie. Nech $\alpha \in \mathbf{R}$, $g, h \in M$.

a) Zistíme hodnotu funkcie $g + h$ v bode a , teda

$$(g + h)(a) = g(a) + h(a) = k + k = 2k$$

Vidíme, že $g + h \in M$ práve vtedy, keď $2k = k$, t.j. $k = 0$.

Predpokladajme teraz, že $k = 0$. Potom

$$(\alpha g)(a) = \alpha g(a) = \alpha k = 0$$

t.j. $\alpha g \in M$. Preto množina M je podpriestor LP $F\langle a, b \rangle$.

6. Označme $SF\langle a, b \rangle$ množinu všetkých reálnych funkcií definovaných a spojitých na intervale $\langle a, b \rangle$. Dokážte, že $SF\langle a, b \rangle$ s obvyklou operáciou sčítovania funkcií a násobenia funkcie reálnym číslom je lineárny priestor.

Riešenie. Množina $SF\langle a, b \rangle$ je podmnožinou LP $F\langle a, b \rangle$ a operácie v $SF\langle a, b \rangle$ sú rovnako definované ako v LP $F\langle a, b \rangle$. Preto stačí dokázať, že $SF\langle a, b \rangle$ je podpriestor LP $F\langle a, b \rangle$. Konštantné funkcie sú spojitými funkciami, preto $SF\langle a, b \rangle \neq \emptyset$. Keďže súčtom dvoch spojitých funkcií je spojitá funkcia a číselný násobok spojitej funkcie je opäť spojitá funkcia, je množina $SF\langle a, b \rangle$ uzavretá vzhľadom na sčítovanie aj násobenie skalárom. To znamená, že $SF\langle a, b \rangle$ je podpriestor LP $F\langle a, b \rangle$ a teda $SF\langle a, b \rangle$ je LP.

7. Zistite, či sú v LP $\mathbf{R}^3$ LZ alebo LN vektory

a) $(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1),$

b) $(1, -\sqrt{2}, -1), (1 - \sqrt{2}, 2, 1 + \sqrt{2}), (\sqrt{2}, -2 - \sqrt{2}, -2 - \sqrt{2}).$

Riešenie. a) Hľadáme čísla α, β, γ , pre ktoré

$$\alpha(1, 1, 0) + \beta(1, 0, 1) + \gamma(0, 1, 1) = (0, 0, 0)$$

Porovnaním zložiek dostaneme sústavu lineárnych rovníc

$$\alpha + \beta = 0$$

$$\alpha + \gamma = 0$$

$$\beta + \gamma = 0$$

ktorej jediným riešením je $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Dané vektory sú preto LN.

Uvedieme ešte druhý spôsob riešenia tejto úlohy. Zapišme vektory $(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)$ ako riadky matice $\mathbf{A}$. Elementárne riadkové operácie (ERO) zachovávajú lineárnu závislosť resp. nezávislosť riadkov matice. Preto môžeme postupovať tak, že maticu $\mathbf{A}$ upravíme pomocou ERO na stupňovitú maticu $\mathbf{B}$, a o jej riadkoch vieme ľahko rozhodnúť, či sú LZ alebo LN.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1, & 1, & 0 \\ 1, & 0, & 1 \\ 0, & 1, & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1, & 1, & 0 \\ 0, & -1, & 1 \\ 0, & 1, & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1, & 1, & 0 \\ 0, & -1, & 1 \\ 0, & 0, & 2 \end{pmatrix} = \mathbf{B}$$

Riadky matice $\mathbf{B}$ sú LN, preto sú LN aj riadky matice $\mathbf{A}$, a teda aj vektory $(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)$.

b) Použijeme maticový zápis a pomocou ERO sa snažme upraviť maticu, ktorej riadky sú dané vektory, na stupňovitý tvar:

$$\begin{pmatrix} 1, & -\sqrt{2}, & -1 \\ 1 - \sqrt{2}, & 2, & 1 + \sqrt{2} \\ \sqrt{2}, & -2 - \sqrt{2}, & -2 - \sqrt{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1, & -\sqrt{2}, & -1 \\ 0, & \sqrt{2}, & 2 \\ 0, & -\sqrt{2}, & -2 \end{pmatrix}$$

Ďalšie ERO už robiť nemusíme, pretože v upravenej matici je 3. riadok (-1) -násobkom 2. riadku, čo znamená, že riadky matice sú LZ. Dané vektory sú preto lineárne závislé.

8. Nech $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ sú LN (lineárne nezávislé) vektory lineárneho priestoru L . Zistite, či sú LN vektory

a) $\bar{x} + \bar{y}, \bar{x} - \bar{y}, \bar{x} + \bar{y} + \bar{z},$

b) $\bar{x} - \bar{y}, \bar{y} - \bar{z}, \bar{z} - \bar{x}.$

Riešenie. a) Predpokladajme, že

$$\alpha(\bar{x} + \bar{y}) + \beta(\bar{x} - \bar{y}) + \gamma(\bar{x} + \bar{y} + \bar{z}) = \bar{0}$$

Ak dokážeme, že za tohto predpokladu sú všetky koeficienty α , β , γ nulové, tak dané vektory sú LN, v opačnom prípade sú LZ (lineárne závislé). Rozpísaním dostávame:

$$(\alpha + \beta + \gamma)\bar{x} + (\alpha - \beta + \gamma)\bar{y} + \gamma\bar{z} = \bar{0}$$

Pretože vektory $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ sú LN, platí

$$\begin{aligned}\alpha + \beta + \gamma &= 0 \\ \alpha - \beta + \gamma &= 0 \\ \gamma &= 0\end{aligned}\tag{1}$$

Odčítaním druhej rovnice od prvej dostávame $2\beta = 0$, t.j. $\beta = 0$, a ďalej $\alpha = 0$. Pretože systém (1) má len triviálne riešenie, sú vektory $\bar{x} + \bar{y}$, $\bar{x} - \bar{y}$, $\bar{x} + \bar{y} + \bar{z}$ LN.

b) Zistíme pre aké čísla α , β , γ platí

$$\alpha(\bar{x} - \bar{y}) + \beta(\bar{y} - \bar{z}) + \gamma(\bar{z} - \bar{x}) = \bar{0}$$

Analogicky ako v časti a) dostávame nasledujúci systém pre neznáme α , β , γ :

$$\begin{aligned}\alpha - \gamma &= 0 \\ \alpha - \beta &= 0 \\ \beta - \gamma &= 0\end{aligned}\tag{2}$$

Zostavíme maticu systému a pomocou ERO (elementárnych riadkových operácií) ju upravíme na redukovaný stupňovitý tvar.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Riešením (2) je $\alpha = t$, $\beta = t$, $\gamma = t$, kde $t \in \mathbf{R}$ je parameter. Zvoľme $t = 1$. Potom

$$1(\bar{x} - \bar{y}) + 1(\bar{y} - \bar{z}) + 1(\bar{z} - \bar{x}) = \bar{0}\tag{3}$$

a vektory $\bar{x} - \bar{y}$, $\bar{y} - \bar{z}$, $\bar{z} - \bar{x}$ sú LZ.

Poznámka. Pozornejší čitateľ uhádol koeficienty v lineárnej kombinácii (3) aj bez počítania.

9. Zistite, či v lineárnom priestore $F(\mathbf{R})$ sú LZ alebo LN funkcie

- a) $\sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x$,
- b) e^x, e^{2x}, e^{3x} ,
- c) $x, 2|x|$.

Zmenia sa nejakým spôsobom výsledky jednotlivých úloh, ak priestor $F(\mathbf{R})$ nahradíme priestorom $F\langle, \infty \rangle$?

Riešenie. a) Nech

$$\alpha \sin x + \beta \cos x + \gamma \sin 2x + \delta \cos 2x = 0 \quad (4)$$

pre každé $x \in \mathbf{R}$. Vhodnou voľbou x dostávame nasledujúce rovnice pre $\alpha, \beta, \gamma, \delta$:

$$x = 0 : \quad \beta + \delta = 0 \quad (5)$$

$$x = \frac{\pi}{4} : \quad \alpha \frac{\sqrt{2}}{2} + \beta \frac{\sqrt{2}}{2} + \gamma = 0 \quad (6)$$

$$x = \frac{\pi}{2} : \quad \alpha - \delta = 0 \quad (7)$$

$$x = \frac{3}{4}\pi : \quad \alpha \frac{\sqrt{2}}{2} - \beta \frac{\sqrt{2}}{2} - \gamma = 0 \quad (8)$$

$$x = \pi : \quad -\beta + \delta = 0 \quad (9)$$

Z rovníc (5), (9) dostávame $\beta = \delta = 0$ a nakoniec z (6) $\gamma = 0$. Ukázali sme, že z rovnice (4) vyplýva $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$, a teda dané funkcie sú LN.

b) Nech

$$\alpha e^x + \beta e^{2x} + \gamma e^{3x} = 0 \quad (10)$$

Potom sa rovnosť funkcií zachová, aj keď funkcie na ľavej a pravej strane rovnosti (10) budeme súčasne raz alebo viackrát derivovať. Dostávame:

$$\alpha e^x + 2\beta e^{2x} + 3\gamma e^{3x} = 0 \quad (11)$$

$$\alpha e^x + 4\beta e^{2x} + 9\gamma e^{3x} = 0 \quad (12)$$

Pretože rovnosti (10), (11), (12) sú splnené pre všetky $x \in \mathbf{R}$, platia aj pre $x = 0$. Dosadením $x = 0$ do týchto rovníc dostávame:

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma &= 0 \\ \alpha + 2\beta + 3\gamma &= 0 \\ \alpha + 4\beta + 9\gamma &= 0 \end{aligned} \quad (13)$$

Systém (13) vyriešime pomocou ERO.

$$\begin{pmatrix} 1, & 1, & 1 \\ 1, & 2, & 3 \\ 1, & 4, & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1, & 1, & 1 \\ 0, & 1, & 2 \\ 0, & 3, & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1, & 1, & 1 \\ 0, & 1, & 2 \\ 0, & 0, & 2 \end{pmatrix}$$

Pretože systém (13) je homogénny a posledná matica má hodnotu 3, má systém len triviálne riešenie $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Funkcie e^x, e^{2x}, e^{3x} sú LN.

d) Nech

$$\alpha x + \beta \cdot 2|x| = 0$$

Ak zvolíme $x = -1, 1$, tak

$$\begin{aligned} -\alpha + 2\beta &= 0 \\ \alpha + 2\beta &= 0 \end{aligned} \quad (14)$$

Jediným riešením systému (14) je $\alpha = \beta = 0$, a teda funkcie $x, 2|x|$ sú LN v LP $F(\mathbf{R})$.

Ak by sme namiesto v $F(\mathbf{R})$ uvažovali dané funkcie v lineárnom priestore $F\langle, \infty\rangle$, riešenie v prípadoch a), b) by bolo rovnaké. V prípade c) by boli dané funkcie LZ, pretože

$$2x - 2|x| = 2x - 2x = 0.$$

10. Zistite, či polynóm $g(x)$ je z lineárneho obalu množiny M v LP $P(\mathbf{R})$

a) $g(x) = x^3 + x^2 + x + 1, M = \{x^3 + x + 2, x + 3, x^2 + 2\},$

b) $g(x) = -x^2 - 4x + 7, M = \{x^2 - 2x + 3, -3x + 5\}.$

Riešenie. Nech

$$x^3 + x^2 + x + 1 = \alpha(x^3 + x + 2) + \beta(x + 3) + \gamma(x^2 + 2) \quad (15)$$

Úpravou dostávame

$$x^3 + x^2 + x + 1 = \alpha x^3 + \gamma x^2 + (\alpha + \beta)x + 2\alpha + 3\beta + 2\gamma$$

odkiaľ porovnaním koeficientov dostaneme systém

$$\begin{aligned} \alpha &= 1 \\ \gamma &= 1 \\ \alpha + \beta &= 1 \\ 2\alpha + 3\beta + 2\gamma &= 1 \end{aligned} \quad (16)$$

lineárnych rovníc s neznámymi α, β, γ . Systém (16) však nemá riešenie, pretože z 3. rovnice vyplýva $\beta = 0$ a potom

$$2\alpha + 3\beta + 2\gamma = 4 \neq 1$$

Pretože neexistujú skaláry $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$ také, že platí (15), polynóm $g(x) \notin Lo M$.

b) Nech

$$-x^2 - 4x + 7 = \alpha(x^2 - 2x + 3) + \beta(-3x + 5) \quad (17)$$

Potom

$$-x^2 - 4x + 7 = \alpha x^2 + (-2\alpha - 3\beta)x + 3\alpha + 5\beta$$

odkiaľ porovnaním koeficientov dostávame systém

$$\begin{aligned} \alpha &= 1 \\ -2\alpha - 3\beta &= -4 \\ 3\alpha + 5\beta &= 7 \end{aligned}$$

ktorého jediným riešením je $\alpha = -1, \beta = 2$. Pretože pre $\alpha = -1, \beta = 2$ je splnený vzťah (17), je $g(x) \in Lo M$.

11. Nájdite bázu a určte dimenziu podpriestoru $P = \{g \in P_3(\mathbf{R}); g(0) + g(1) = 0, g(-1) = 0\}$ lineárneho priestoru $P_3(\mathbf{R})$.

Riešenie. Zistíme najprv, ktoré polynómy patria do P . Nech $g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \in P$, potom

$$\begin{aligned}d + a + b + c + d &= 0 \\ -a + b - c + d &= 0\end{aligned}$$

Riešením tejto sústavy rovníc je $(-c - \frac{1}{2}d, -\frac{3}{2}d, c, d)$, kde c, d sú ľubovoľné reálne čísla. Teda

$$g(x) = (-c - \frac{1}{2}d)x^3 - \frac{3}{2}dx^2 + cx + d = c(-x^3 + x) + d(-\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 1)$$

Vidíme, že $g(x)$ je lineárnou kombináciou polynómov $-x^3 + x, -\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 1$, preto $P = \text{Lo}\{-x^3 + x, -\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 1\}$. Našli sme generátory podpriestoru P . Zistíme, či sú lineárne nezávislé. Nech

$$\alpha(-x^3 + x) + \beta(-\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 1) = 0,$$

po úprave

$$(-\alpha - \frac{1}{2}\beta)x^3 - \frac{3}{2}\beta x^2 + \alpha x + \beta = 0.$$

Porovnaním koeficientov polynómov na oboch stranách rovnosti dostaneme systém lineárnych rovníc

$$\begin{aligned}-\alpha - \frac{1}{2}\beta &= 0 \\ -\frac{3}{2}\beta &= 0 \\ \alpha &= 0 \\ \beta &= 0\end{aligned}$$

ktorá má jediné riešenie $\alpha = \beta = 0$. Zistili sme, že množina $B = \{-x^3 + x, -\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 1\}$ je LN, jej Lineárny obal je celý priestor P , preto B je báza lineárneho priestoru P . Báza B je dvojprvková, teda $\dim P = 2$.

12. Nájdite súradnice prvku $\mathbf{A}$ v usporiadanej báze $\mathcal{B}$ lineárneho priestoru $\mathbf{R}^{2 \times 2}$, ak $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1, & 2 \\ 3, & 4 \end{pmatrix}$ a $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, & 1 \\ 0, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, & 1 \\ 1, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, & 1 \\ 1, & 1 \end{pmatrix} \right)$.

Riešenie. Vyjadríme maticu $\mathbf{A}$ ako lineárnu kombináciu prvkov bázy $\mathcal{B}$. Porovnaním matíc z oboch strán rovnosti dostaneme sústavu lineárnych rovníc. Jej vyriešením získame hľadané súradnice:

$$\begin{pmatrix} 1, & 2 \\ 3, & 4 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1, & 1 \\ 0, & 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1, & 1 \\ 1, & 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 1, & 1 \\ 1, & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\alpha + \beta + \gamma + \delta &= 1 \\
\beta + \gamma + \delta &= 2 \\
\gamma + \delta &= 3 \\
\delta &= 4
\end{aligned}$$

Odkiaľ $\alpha = \beta = \gamma = -1$, $\delta = 4$. Potom

$$\mathbf{A}_B = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = (-1, -1, -1, 4)^T$$

13. Nájdite nejakú bázu a určte dimenziu $Lo M$ v lineárnom priestore $P_3(\mathbf{R})$, ak $M = \{1 + x + x^3, 1 - x, 2x - x^2, 2 - x^2, 2x + x^2 + 2x^3\}$.

Riešenie. Zvoľme v LP $P_3(\mathbf{R})$ usporiadanú bázu a vyhľadajme súradnice prvkov množiny M v tejto báze. Výhodné je zvoliť štandardnú bázu $B = (1, x, x^2, x^3)$, lebo súradnice prvkov v tejto báze sa ľahko určujú. Zrejme

$$\begin{aligned}
(1 + x + x^3)_B &= (1, 1, 0, 1)^T, (1 - x)_B = (1, -1, 0, 0)^T, (2x - x^2)_B = (0, 2, -1, 0), \\
(2 - x^2)_B &= (2, 0, -1, 0)^T, (2x + x^2 + 2x^3)_B = (0, 2, 1, 2)^T
\end{aligned}$$

Zapišeme tieto súradnice ako riadky matice, ktorú pomocou ERO upravíme na stupňovitú maticu. Nenulové riadky tejto stupňovitej matice určujú súradnice prvkov bázy $\mathcal{D}$ lineárneho obalu množiny M .

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1, & 1, & 0, & 1 \\ 1, & -1, & 0, & 0 \\ 0, & 2, & -1, & 0 \\ 2, & 0, & -1, & 0 \\ 0, & 2, & 1, & 2 \end{pmatrix} &\sim \begin{pmatrix} 1, & 1, & 0, & 1 \\ 0, & -2, & 0, & -1 \\ 0, & 2, & -1, & 0 \\ 0, & -2, & -1, & -2 \\ 0, & 2, & 1, & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1, & 1, & 0, & 1 \\ 0, & 2, & 0, & 1 \\ 0, & 0, & -1, & -1 \\ 0, & 0, & -1, & -1 \\ 0, & 0, & 1, & 1 \end{pmatrix} \sim \\
&\sim \begin{pmatrix} 1, & 1, & 0, & 1 \\ 0, & 2, & 0, & 1 \\ 0, & 0, & 1, & 1 \\ 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\mathcal{D} = \{1 + x + x^3, 2x + x^3, x^2 + x^3\}, \dim Lo M = 3.$$

1.2 Cvičenia

1. Overte vlastnosti z definície LP (lineárneho priestoru) pre $(\mathbf{R}^2, +, \cdot)$.
2. Zistite, či $(\mathbf{R}^2, \oplus, \odot)$ je reálny lineárny priestor, ak

$$\begin{aligned}
(x_1, x_2) \oplus (y_1, y_2) &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2) \\
\alpha \odot (x_1, x_2) &= (\alpha x_1, x_2).
\end{aligned}$$

3. Nech $F(A)$ je množina všetkých reálnych funkcií definovaných na množine A , $A \subset \mathbf{R}$. Súčet funkcií je definovaný predpisom $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ a násobenie funkcie skalárom predpisom $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$. Zistite, či $(F(A), +, \cdot)$ je lineárny priestor nad $\mathbf{R}$.
4. Zistite, či množina $\mathbf{R}^{m \times n}$ všetkých reálnych matíc typu $m \times n$ (resp. $\mathbf{C}^{m \times n}$ všetkých komplexných matíc typu $m \times n$) s obvyklým sčítaním matíc a obvyklým násobením matice reálnym (komplexným) číslom je lineárny priestor nad $\mathbf{R}$ ($\mathbf{C}$).
5. Rozhodnite, či množina S všetkých
 - (a) nekonečných postupností,
 - (b) nekonečných konštantných postupností,
 - (c) nekonečných konvergentných postupností,
 - (d) nekonečných divergentných postupností

reálnych čísel spolu s operáciami

$$\begin{aligned}\{x_n\}_{n=1}^{\infty} + \{y_n\}_{n=1}^{\infty} &= \{x_n + y_n\}_{n=1}^{\infty} \\ \alpha \cdot \{x_n\}_{n=1}^{\infty} &= \{\alpha x_n\}_{n=1}^{\infty}\end{aligned}$$

6. Zistite, či množina M je podpriestor LP $\mathbf{R}^2$.
 - (a) $M = \{(x, y); x + 2y = 0\}$,
 - (b) $M = \{(x, y); xy \geq 0\}$,
 - (c) $M = \{(x, y); x + y = 2\}$,
 - (d) $M = \{(x, x); x \geq 0\}$,
7. Rozhodnite, či množina M je podpriestor LP $\mathbf{R}^3$.
 - (a) $M = \{(x, y, z); 2x + y - z = 0, \}$,
 - (b) $M = \{(x, y, z); x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$,
 - (c) $M = \{(x, y, z); 2x = y = -z\}$,
 - (d) $M = \{(x, y, z); xy \geq 0\}$,
8. Rozhodnite, či nasledujúce množiny sú podpriestory LP $P(\mathbf{R})$.
 - (a) $P_n(\mathbf{R})$ – množina všetkých reálnych polynómov stupňa najviac n .
 - (b) Množina všetkých reálnych polynómov $p(x)$ takých, že $p(0) = 1$.
 - (c) Množina všetkých reálnych polynómov $p(x)$ takých, že $p(0) = p(1) = 0$.
 - (d) Množina všetkých reálnych polynómov stupňa 2 a nulový polynóm.
 - (e) Množina všetkých reálnych polynómov, ktorých 3. derivácia je 0.
9. Rozhodnite, či nasledujúce podmnožiny množiny $\mathbf{R}^{2 \times 2}$ sú podpriestory LP $\mathbf{R}^{2 \times 2}$.

- (a) Množina všetkých dolných trojuholníkových matíc.
- (b) Množina všetkých matíc $\mathbf{A} = (a_{ij})$, ktoré spĺňajú podmienku $a_{11} + a_{22} = 0$.
- (c) Množina všetkých symetrických matíc.
- (d) Množina všetkých singulárnych matíc.
10. Rozhodnite, či sú lineárne závislé alebo nezávislé vektory
- (a) $(-2, 1), (4, -2)$,
- (b) $(1, 5), (5, 1)$,
- (c) $(-3, 5), (6, 10)$.
11. Rozhodnite, či sú lineárne závislé alebo nezávislé vektory
- (a) $(-3, 2, 1), (2, -1, 3), (1, 0, 7)$,
- (b) $(1, -2, 3), (-2, 4, -6)$,
- (c) $(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 1)$,
- (d) $(-1, -1, 1, 1), (1, -1, 1, -1), (-1, 1, 1, -1), (1, 1, 1, 1)$.
12. Zistite, či v lineárnom priestore $P(\mathbf{R})$ sú LZ alebo LN polynómy
- (a) $1, 1 + x, 1 + x^2, 1 + x^3$,
- (b) $1 - x, x - x^2, x^2 - x^3, x^3 - 1$,
- (c) $2 + x + 3x^2, -1 + 5x + x^2, 3 + 7x + 7x^2$,
- (d) $1, x, x^2, \dots, x^n$ pre $n \geq 1$.
13. Zistite, či v lineárnom priestore $SF(-\infty, \infty)$ sú LZ alebo LN funkcie
- (a) $1, \sin x, \cos x$,
- (b) $2005, \sin^2 x, \cos^2 x$,
- (c) e^x, e^{-x} ,
- (d) x, e^x, e^{2x}, e^{3x} .
14. Zistite, či v lineárnom priestore $\mathbf{R}^{2 \times 2}$ sú LZ alebo LN matice
- (a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$,
- (b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
15. Vektory $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{u}$ lineárneho priestoru L sú lineárne nezávislé. Zistite, či sú LZ alebo LN vektory
- (a) $\bar{x} + \bar{y}, \bar{y} + \bar{z}, \bar{z} + \bar{u}, \bar{u} + \bar{x}$,

- (b) $\bar{x} + \bar{y} + \bar{z}, \bar{y} + \bar{z} + \bar{u}, \bar{z} + \bar{u} + \bar{x}, \bar{u} + \bar{x} + \bar{y}$.
16. Ukážte, že funkcie $5x$ a $|x|$ sú
- (a) lineárne nezávislé v $\text{SF}\langle -1, 1 \rangle$,
(b) lineárne závislé v $\text{SF}\langle 0, 1 \rangle$.
17. Zistite, či $\bar{u} \in \text{Lo}\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\}$.
- (a) $\bar{u} = (1, 1, 1), \bar{u}_1 = (0, 1, 1), \bar{u}_2 = (1, 0, 1), \bar{u}_3 = (1, 1, 0)$.
(b) $\bar{u} = (1, 1, -1), \bar{u}_1 = (0, 1, 1), \bar{u}_2 = (1, 0, 1), \bar{u}_3 = (1, -1, 0)$.
18. Zistite, či množina vektorov je báza v $\mathbf{R}^2$.
- (a) $\{1, 2), (0, 1), (3, 2)\}$
(b) $\{\ddot{a}1, 0, (1, 1)\}$
(c) $\{(2, -1), (-6, 3)\}$
19. Zistite, či množina vektorov je báza v $\mathbf{R}^3$.
- (a) $\{(1, 2, -1), (0, 1, -2), (1, 0, 3)\}$
(b) $\{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 1)\}$
(c) $\{(2, 1, -3), (4, 2, 1), (0, 0, 2), (1, 1, 1)\}$
20. Zistite, či množina polynómov je báza v $P_3(\mathbf{R})$.
- (a) $\{1, 1 + x, 1 + x^2, 1 + x^3\}$
(b) $\{1, 1 + x, 1 - x, 1 + x + x^2 + x^3\}$
(c) $\{1 + x, x + x^2, x^2 + x^3, x^3 + 1\}$
21. Nájdite bázu podpriestoru $S = \{(a + b + c, a - b, b + c, b - c); a, b, c \in \mathbf{R}\}$ lineárneho priestoru $\mathbf{R}^4$. Vypočítajte $\dim S$.
22. $S = \{a + bx + (a + c)x^2 + (b - c)x^3; a, b, c \in \mathbf{R}\}$ je podpriestor lineárneho priestoru $P_3(\mathbf{R})$. Nájdite jeho bázu a dimenziu.
23. Nájdite bázu a dimenziu podpriestoru S v $\mathbf{R}^3$.
- (a) $S = \{(x_1, x_2, x_3); x_1 = x_2 = x_3\}$
(b) $S = \{(x_1, x_2, x_3); x_1 + 2x_2 + x_3 = 0\}$
(c) $S = \{(x_1, x_2, x_3); x_1 = 2x_2 = 3x_3, x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$
24. Nájdite bázu a dimenziu podpriestoru S v $P_3(\mathbf{R})$.
- (a) $\{p(x); p(0) = 0\}$
(b) $\{p(x); p(0) = p(1) = 0\}$

25. Nájdite bázu a dimenziu L o M_i

- (a) $M_1 = \{(1, 3, 0), (-5, 1, 0), (3, 2, 0), (0, 0, 0), (1, 1, 0)\}$,
- (b) $M_2 = \{(1, -2, 2, 0), (0, 1, 0, 1), (1, -1, 2, 1), (1, 0, 2, 2), (2, -1, 4, 3)\}$,
- (c) $M_3 = \{2x - 1, x^3 + x + 1, x^2 + x, 2x^2 + 1, x^3 + 3x^2 + 2x + 2\}$,
- (d) $M_4 = \{1 + x, 1 - x, 1 + x^2, 1 - x^2, 1 + x^3, 1 - x^3\}$

v lineárnom priestore (a) $\mathbf{R}^3$, (b) $\mathbf{R}^4$, (c),(d) $P_3(\mathbf{R})$.

26. Nájdite súradnice vektora (polynómu) v báze $\mathcal{B}$ lineárneho priestoru L .

- (a) $(2, 1, 1)$, $\mathcal{B} = \{(2, 7, 3), (3, 9, 4), ((1, 5, 3))\}$, $L = \mathbf{R}^3$,
- (b) $(0, 0, 2, 7)$, $\mathcal{B} = \{(4, 2, -1, -6), (3, 1, 1, -2), (1, 2, 1, 1), (2, 3, 1, 0)\}$, $L = \mathbf{R}^4$,
- (c) $1 + x + x^2 + x^3$, $\mathcal{B} = \{1 + x^3, x + x^3, x^2 + x^3, x^3\}$, $L = P_3(\mathbf{R})$.

1.3 Výsledky

2. Nie je LP, lebo nie je splnená vlastnosť $(\alpha + \beta) \odot \bar{x} = (\alpha \odot \bar{x}) \oplus (\beta \odot \bar{x})$. **3.** Áno. **4.** Áno. **5.** (a),(b),(c) Áno. (d) Nie, lebo súčtom dvoch divergentných postupností nemusí byť divergentná postupnosť. **6.** (a) Áno. (b),(c),(d) Nie. **7.** (a),(c) Áno. (b),(d) Nie. **8.** (a),(c),(e) Áno. (b),(d) Nie. **8.** (a),(b),(c) Áno. (d) Nie, lebo súčtom dvoch singulárnych matic môže byť matica regulárna – nájdite také matice. **10.** (a) LZ. (b),(c) LN. **11.** (a),(b),(c) LZ. (d) LN. **12.** (a),(d) LN. (b),(c) LZ. **13.** (a),(c),(d) LN. (b) LZ. **14.** (a) LZ. (b) LN. **15.** (a) LZ. (b) LN. **17.** (a) Áno. (b) Nie. **18.** (a),(c) Nie. (b) Áno. **19.** (a),(c) Nie. (b) Áno. **20.** (a) Áno. (b),(c) Nie. **21.** $\{(1, 1, 0, 0), (1, -1, 1, 1), (1, 0, 1, -1)\}$, $\dim S = 3$. **22.** $\{1 + x^2, x + x^3, x^2 - x^3\}$, $\dim S = 3$. **23.** (a) $\{(1, 1, 1)\}$, $\dim S = 1$. (b) $\{(-2, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$, $\dim S = 2$. (c) Nemá bázu, $\dim S = 0$. **24.** (a) $\{x, x^2, x^3\}$, $\dim S = 3$. (b) $\{x - x^2, x - x^3\}$, $\dim S = 2$. **25.** (a) $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$, $\dim M_1 = 2$. (b) $\{(1, -2, 2, 0), (0, 1, 0, 1)\}$, $\dim M_2 = 2$. (c) $\{1 + \frac{8}{3}x^3, x + \frac{1}{3}x^3, x^2 - \frac{1}{3}x^3\}$, $\dim M_3 = 3$. (d) $\{1, x, x^2, x^3\}$, $\dim M_4 = 4$. **26.** (a) $(-5, 4, 0)^T$. (b) $(11, -3, 67, -54)^T$. (c) $(1, 1, 1, -2)^T$.